Análisis II - Matemática 3
Análisis Matematico II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 4 - 2do cuatrimestre 2021

Integrales vectoriales

Integrales curvilíneas. Trabajo

Una fuerza F actúa sobre una partícula que se desplaza siguiendo una trayectoria $\sigma(t)$ entre dos puntos, ¿cuál es el trabajo que ejerce esta fuerza?

$\sigma(t) =$ posición de la partícula en el instante t.

Caso fácil 1: la partícula se mueve sobre una recta, la fuerza es constante y apunta en la misma dirección:

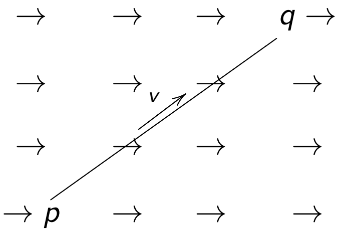
$$\rightarrow \qquad \rightarrow \quad \rightarrow \qquad \rightarrow$$

$$\rightarrow p \; \underline{\quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad} \; q \rightarrow$$

$$\rightarrow \qquad \rightarrow \quad \rightarrow \qquad \rightarrow$$

Trabajo $=$ fuerza $\times$ distancia recorrida $= \|F\| \cdot ||q - p||$.
Si actúa en sentido contrario, el trabajo será $-$ la magnitud de la fuerza: $-\|F\|$ por la distancia recorrida.

Caso fácil 2: la partícula se mueve sobre una recta y la fuerza es constante, pero no apunta en la misma dirección:



Observamos $F = F_\tau + F_\perp$ donde

$$F_\tau = \big(F \cdot \tau\big)\,\tau = \langle F, \tau \rangle \tau$$

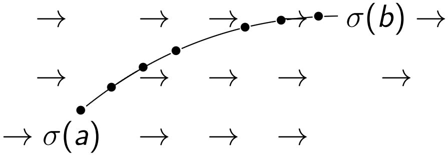
es la componente en la dirección del movimiento ($\|v\| = 1$) y $F_\perp$ es la componente perpendicular. $F_\perp$ no realiza trabajo.

$$Trabajo = \|F_\tau\| \cdot ||q - p|| = \langle F, \tau \rangle ||q - p||$$

Notar $v = \frac{q-p}{\|q-p\|}$ (si vamos de p a q) entonces

$$F_\tau \cdot ||q - p|| = \left\langle F, \frac{q-p}{\|q-p\|} \right\rangle \|q - p\| = \langle F, q - p \rangle$$

Caso mas general: σ C^1 y F continua



Partimos el intervalo $\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$, el trabajo = suma de trabajos desde $\sigma(t_i)$ a $\sigma(t_{i+1})$: $T = \sum_{i=0}^{n-1} T_i$, con

$$T_i \sim \left\langle F(\sigma(t_i)),\ \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \right\rangle$$

$$\Rightarrow T \sim \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle F(\sigma(t_i)),\ \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \right\rangle$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle F(\sigma(t_i)), \frac{\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\rangle (t_{i+1} - t_1)$$

$$\sim \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle F(\sigma(t_i)), \sigma'(t_i) \right\rangle (t_{i+1} - t_1)$$

Integrales curvilíneas. Trabajo

Definición: $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo, se define

$$\int_\sigma F \cdot d\vec{\ell} = \int_\sigma \langle F, d\vec{\ell} \rangle$$

por

$$\int_a^b \left\langle F\big(\sigma(t)\big), \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} \right\rangle \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \langle F\big(\sigma(t)\big), \sigma'(t) \rangle dt$$

Ejemplo

Sea $\mathcal{C}$ la curva orientada dada por la parametrización

$$\sigma(t) = (t, t^2)$$

con $t \in [0, 1]$. Sea

$$\mathbf{F}(x, y) = -(x, y)$$

un campo de fuerzas. Supongamos que una partícula se desplaza por la curva $\mathcal{C}$ siguiendo la trayectoria σ. El trabajo efectuado por la fuerza sobre la partícula es

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 -(t, t^2) \cdot (1, 2t)\, dt = -\int_0^1 [t + 2t^3]\, dt = -\left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2}\right]_0^1 = -1.$$

Notacion

Para la integral curvilinea de un campo $F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$ sobre una curva orientada $\mathcal{C}$ se utiliza indistintamente las notaciones

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{\ell} \quad \text{o} \quad \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

La idea de esta notación es que

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t)\rangle dt =$$

$$\int_a^b \Big\langle \big(P(x(t),y(t),z(t)), Q(x(t),y(t),z(t)), R(x(t),y(t),z(t))\big), \big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)\Big\rangle dt$$

$$= \int_a^b \Big(P(x(t),y(t),z(t))\, x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\, y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\, z'(t) \Big) dt$$

$$= \int_a^b \left(P(x,y,z)\frac{dx}{dt} + Q(x,y,z)\frac{dy}{dt} + R(x,y,z)\frac{dz}{dt} \right) dt$$

Integrales curvilíneas. Campos gradientes

Si $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ se relacionan por

$$F = \nabla f, \qquad F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Y $\mathcal{C}$ viene parametrizada por $\sigma : [a, b] \mapsto \mathcal{C}$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} F &= \int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t)\rangle dt \\ &= \int_a^b \langle \nabla f(\sigma(t)), \sigma'(t)\rangle dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\Big(f(\sigma(t))\Big) dt = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).\end{aligned}$$

Reparametrizaciones

Recordemos: Si

$$\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$$

es una parametrización regular de $\mathcal{C}$ y $h[c, d] \mapsto [a, b]$ es C^1 con $h'(s) \neq 0$, entonces

$$\hat{\sigma}(s) = \sigma(h(s))$$

resulta una (re)parametrización regular de $\mathcal{C}$.

Reparametrizaciones

Si $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$, tenemos que las integrales calculando con σ

$$\int_{\mathcal{C},\sigma} \mathbf{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \sigma'(t)) \rangle dt$$

y con $\hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}(s) = \sigma(h(s))$,

$$\int_{\mathcal{C},\hat{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_c^d \langle \mathbf{F}(\hat{\sigma}(s)), \hat{\sigma}'(s)) \rangle ds$$

$$= \int_c^d \langle \mathbf{F}(\sigma(h(s)), \sigma'(h(s)) \rangle h'(s) ds$$

que SON IGUALES si y sólo si $h'(s) > 0$, pero si $h'(s) < 0$ son una MENOS la otra.

EL TRABAJO DEPENDE DE LA ORIENTACION.

Orientación

Sea $\mathcal{C}$ una curva regular. Decimos que dos parametrizaciones regulares $\sigma_1 : [a, b] \to \mathcal{C}$ y $\sigma_2 : [c, d] \to \mathcal{C}$ tienen la misma orientación si

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(h(t))$$

con $h : [c, d] \to [a, b]$ verificando $h'(t) > 0 \forall t$.

Ejemplo: Si $\sigma : [0, 1] \to \mathcal{C}$ y $\widetilde{\sigma} : [0, 1] \to \mathcal{C}$ está dada por $\widetilde{\sigma}(t) = \sigma(1 - t)$, entonces σ y $\widetilde{\sigma}$ tienen **orientaciones opuestas**.

$$c(t) := \sigma(2t), \qquad t \in [0, 1/2]$$

tiene la misma orientación que σ.