Análisis II - Matemática 3
Análisis Matematico II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 3 - 2do cuatrimestre 2021

Integrales escalares

Integral en $\mathbb{R}$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, $\Pi = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Una suma parcial es

$$S_{f,\Pi} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)|x_{i+1} - x_i|$$

aproxima la integral. Si f es integrable (e.g. f continua) entonces la integral

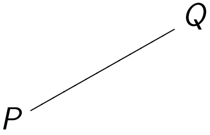
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\to \Pi} S_{f,\Pi}$$

es el límite sobre las particiones cada vez más finas de esas sumas.

Integrales en curvas

Ejemplo: Se quiere calcular el peso de un alambre que tiene densidad variable. Si la densidad en un punto (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z)$, y el alambre es la imagen de $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, cómo calcular?

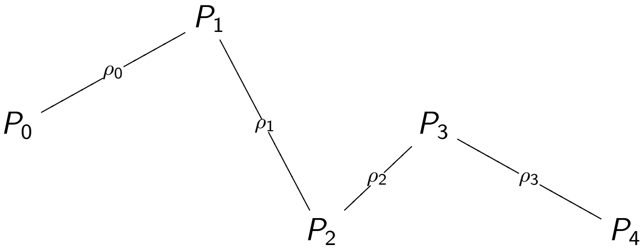
Caso fácil: $\rho = \rho_0$ cte y el alambre es un segmento de recta, entre los puntos P y Q:



entonces Peso $= \rho_0 \times$ longitud $= \rho_0 ||Q - P||$.

Caso semi-fácil:

El alambre es una poligonal, y en cada trozo la densidad es cte:



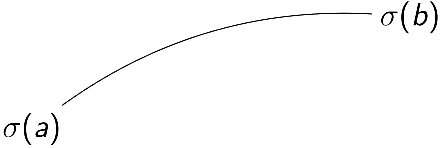
entonces Peso $=$

$$\rho_0||P_1 - P_0|| + \rho_1||P_2 - P_1|| + \rho_2||P_3 - P_2|| + \rho_3||P_4 - P_3||$$

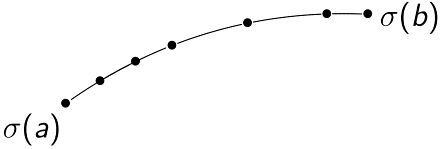
$$= \sum_{i=0}^{3} \rho_i||P_{i+1} - P_i||$$

Caso mas general:

El alambre “se parece a una poligonal” y la densidad es continua



entonces particionamos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$

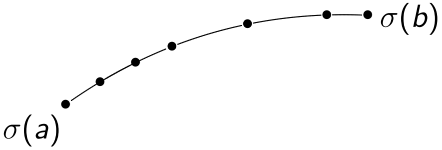


$$Peso \sim \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\sigma(t_i))||\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)||$$

Caso mas general:

Si σ es suficientemente derivable y $t_{i+1} - t_i$ es chico:

$$\sigma(t_{i+1}) \sim \sigma(t_i) + \sigma'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$



$$\Rightarrow \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \sim \sigma'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\sigma(t_i))||\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)|| \sim \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\sigma(t_i))||\sigma'(t_i)||(t_{i+1} - t_i)$$

Definición: [Integración de un campo escalar]
$\mathcal{C}$ curva regular, $\rho : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathcal{C}} \rho d\ell := \int_a^b \rho(\sigma(t))||\sigma'(t)||dt$$

En particular, la longitud de una curva simple suave se puede calcular como

$$Long(\mathcal{C}) = \int_a^b ||\sigma'(t)||dt$$

donde σ es una parametrización regular.

Ejemplo

1 (a): $\mathcal{C}=$ circulo de radio R en el plano:

$$\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ \sigma(t) = \big(R\cos(t), R\,\mathrm{sen}(t)\big)$$

1(b) $\mathcal{C}=$ el mismo de antes,

$$c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \ c(t) = \big(R\cos(2\pi t), R\,\mathrm{sen}(2\pi t)\big)$$

En ambos casos obtenemos Long $(\mathcal{C}) = 2\pi$

Resumen: Sea C una curva regular y $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Como $\mathcal{C}$ es regular, sabemos que existe *alguna* parametrización regular $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$. Usamos *esa* parametrización y definimos

$$\int_{\mathcal{C}} \rho d\ell := \int_a^b \rho \circ \sigma ||\sigma'|| = \int_a^b \rho(\sigma(t))||\sigma'(t)||dt$$

Teorema: Esta definición NO DEPENDE de la parametrizacón regular que se use.

dem:

Demostración:

Sea $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ una parametrización regular y $\phi : [c, d] \to [a, b]$ una biyección C^1 con $\phi'(s) \neq 0$ para todo $s \in [c, d]$. Si $\widetilde{\sigma}(s) = \sigma(\phi(s))$, entonces

$$\int_c^d \rho\Big(\widetilde{\sigma}(s)\Big)||\widetilde{\sigma}'(s)||ds = \int_c^d \rho\Big(\sigma(\phi(s))\Big)\Big\|\phi'(s)\sigma'(\phi(s))\Big\|ds$$

$$= \int_c^d \rho\Big(\sigma(\phi(s))\Big)\Big\|\sigma'(\phi(s))\Big\| \, |\phi'(s)|ds$$

Con la sustitución $t := \phi(s)$,

$$= \int_a^b \rho\Big(\sigma(t)\Big)||\sigma'(t)||dt$$

Es decir, da lo mismo usar σ que $\widetilde{\sigma} = \sigma \circ \phi$.