Análisis II - Matemática 3
Análisis Matemático II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 24 - 2do cuatrimestre 2021
Sistemas autónomos, linealización, diagramas de fase de sistemas lineales. Sistemas conservativos.

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene autovalor complejo no real $z = a + bi$ $(b \neq 0)$

$$\exists 0 \neq w \in \mathbb{C}^2 - \mathbb{R}^2 \text{ tal que } Aw = zw$$

$$Aw = zw \Rightarrow \ A\overline{w} = \overline{Aw} = \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$$

$$z = a + bi, \ w = (w_1, w_2)$$

$$\vec{v}_1 := \frac{1}{2}(w + \overline{w}) = Re(w) = (Re(w_1), Re(w_2))$$

$$\vec{v}_2 := \frac{1}{2i}(w - \overline{w}) = Im(w) = (Im(w_1), Im(w_2))$$

$$w = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$$

$$Aw = A(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) = zw = (a + bi)(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2)$$

$$= a\vec{v}_1 - b\vec{v}_2 + i(b\vec{v}_1 + a\vec{v}_2) \ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} A\vec{v}_1 = Re(Aw) = a\vec{v}_1 - b\vec{v}_2 \\ A\vec{v}_2 = Im(Aw) = b\vec{v}_1 + a\vec{v}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Big(A\Big)_{\{v_1, v_2\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Caso complejo:

$$\begin{cases} y_1' &= \quad ay_1 + by_2 \\ y_2' &= -by_1 + ay_2 \end{cases}$$

$$\boxed{y_1 = ce^{at}\cos(bt + \alpha_0)}$$

$$y_1' = c\Big(ae^{at}\cos(bt+\alpha_0) - be^{at}\operatorname{sen}(bt+\alpha_0)\Big)$$

$$y_1' = ay_1 + b\Big(-c\operatorname{sen}(bt+\alpha_0)\Big)$$

$$\Rightarrow y_2 = -ce^{at}\operatorname{sen}(bt)$$

$$\therefore (y_1(t), y_2(t)) = ce^{at}\big(\cos(bt+\alpha_0), -\operatorname{sen}(bt+\alpha_0)\big)$$

Son espirales, hacia afuera si $a > 0$, hacia adentro si $a < 0$.
Notar que el signo de b "no está determinado"

Linealización

Ejemplo del modelo de poblaciones $x(t)$, $y(t)$ simbióticas $(\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0)$:

$$F(x, y) = \big((-\alpha + \beta y)\,x, (-\gamma + \delta x)\,y\big)$$

Por comodidad, consideremos $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$. Calculamos los puntos de equilibrio:

$$(0,0) = F(x, y) = \big((-1 + y)\,x, (-1 + x)\,y\big) \Rightarrow$$

$$(-1 + y)x = 0$$

$$(-1 + x)y = 0$$

$x = 0 \Rightarrow -1y = 0 \Rightarrow y = 0$.
$x \neq 0 \Rightarrow y = 1 \neq 0 \Rightarrow x = 1$.
Hay dos untos de equilibrio: $(0,0)$, $(1,1)$.
Calculamos el diferencial de F:

$$F(x,y) = \big((-1+y)\,x, (-1+x)\,y\big) = \big(-1x + yx, -1y + xy\big) \Rightarrow$$

$$DF = \begin{pmatrix} -1+y & x \\ y & -1+x \end{pmatrix}$$

$$DF|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ cerca del $(0,0)$ se tiende al $(0,0)$.

$$DF|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene autovector $(1,1)$ de autovalor 1,
autovector $(1,-1)$ de autovalor -1.
es inestable.

Tarea: hacer las cuentas con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Sistemas Conservativos

Ecuaciones de la forma

$$x'' = -U'(x)$$

$U(x)$ se llama potencial del campo conservativo y representa una forma de energía llamada Energía Potencial.

$x = x(t)$, $v(t) = x'(t)$. El diagrama de fase es el $\mathbb{R}^2$, con la curva $(x(t), v(t))$.

En dimensiones mayores el análogo es

$$X''(t) = -\nabla U|_{X(t)}$$

donde $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Sólo podemos dibujar en el caso unidimensional...

Para sistemas conservativos la “energía mecánica” se conserva (de ahí el nombre).

$$E(x,v) := \frac{1}{2}v^2 + U(x)$$

sobre las trayectorias solucion de $x'' = -\frac{d}{dx}U(x)$:

$$\frac{d}{dt}E(x(t),v(t)) = \frac{d}{dt}\Big(E(x(t),x'(t))\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}(x'(t))^2 + U(x(t))\Big)$$

$$= \frac{2}{2}x'x'' + \frac{d}{dx}U(x(t))x' = x'\Big(x'' + \frac{d}{dx}U(x)\Big) = 0$$

$\therefore$ las trayectorias están contenidas en las curvas de nivel

$$E(x,v) = cte$$

Sistemas Conservativos

Transformamos la ec. de orden 2 $x'' = -'(x)$ en un sistema 2×2:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -U'(x) \end{cases}$$

La energía es

$$E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + U(x).$$

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -U'(x) \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad (x,v)' = F(x,v), \quad F(x,v) = (v, -U(x))$$

Puntos de equilibrio: (x_0, v_0) tales que

$$v_0 = 0 \qquad \text{y} \qquad U'(x_0) = 0$$

$\rightsquigarrow$ puntos de la forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto crítico de U.

Observamos $\nabla E(x,v) = \nabla(\frac{1}{2}v^2 + U(x)) = (U'(x), v)$ se anula sólo en los equilibrios.
$\therefore$ los conjuntos de nivel que no contienen equilibrios son curvas suaves.

Sistemas Conservativos

Ejemplo del péndulo: $\theta'' = -\operatorname{sen}(\theta)$

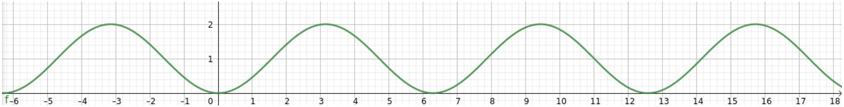
$$\begin{cases} \theta' = v \\ v' = -U'(\theta) \end{cases} \qquad U(x) = -\cos(\theta) + 1$$

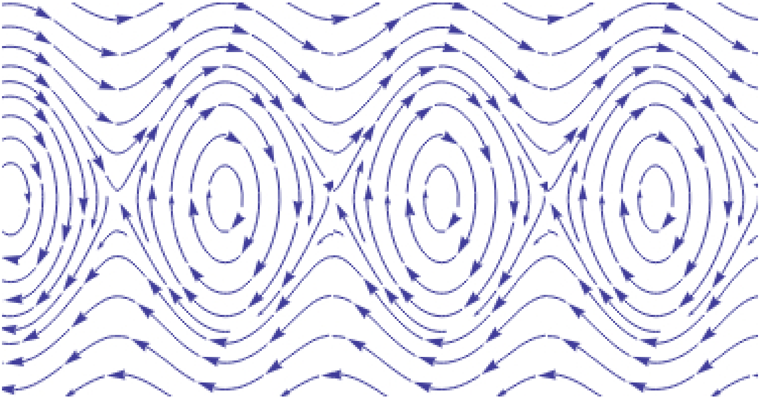
$$E = \frac{1}{2}v^2 + \cos(\theta) - 1$$

para θ pequeño, ó $\theta \approx 2k\pi$, $E \approx \frac{1}{2}(v^2 + \theta^2)$

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \cos(\theta) - 1 \geq \cos(\theta) - 1$$

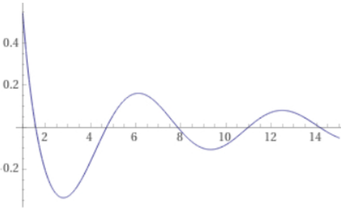
Si la energía es baja, estamos "confinados". Si la enería es alta, la velocidad (al cuadrado) modulo según θ.


f
2
1
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

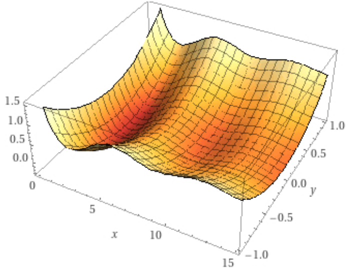


Supongamos que nos dan el gráfico del potencial U, cómo es el diagrama de fases correspondiente?

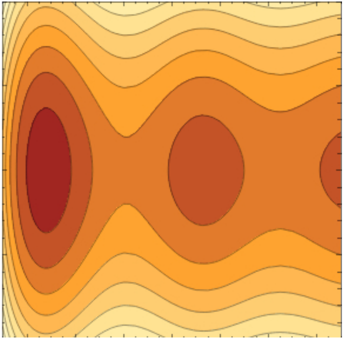
Potencial $U(x) = \cos(x)/x$



Paisaje de energía: $\frac{1}{2}v^2 + U$



curvas de nivel



Caso no conservativo:

Ejemplo del péndulo amortiguado:

$$\begin{cases} \theta' = v \\ v' = -\operatorname{sen}(\theta) - cv \end{cases}$$

Puntos de equilibrio: $v = 0$, $\theta = n\pi$.

Supongamos $0 < c$ pequeño (0.4 en el dibujo).