Análisis II - Matemática 3
Análisis Matemático II

Marco Farinati

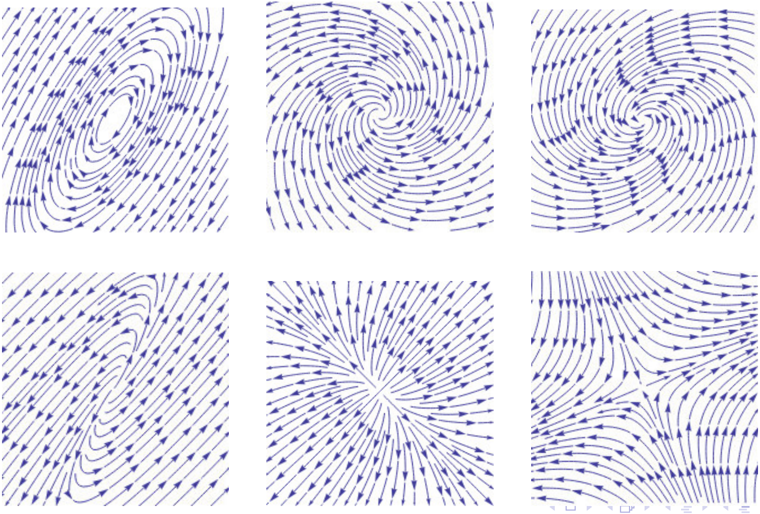
FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 23 - 2do cuatrimestre 2021
Sistemas autónomos, linealización, diagramas de fase de sistemas lineales.

Visualizando soluciones: Diagramas de fase

$$X' = AX, \quad X(t_0) = v_0$$

Para cada v_0, ¿Cómo es la curva $X(t)$?



Definición

Diremos que un sistema es **autónomo** si es de la forma

$$X' = f(X)$$

donde $X : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo C^1.

Algunas generalidades sobre sistemas autónomos

$$X' = F(X)$$

X_0 tal que $F(X_0) = 0$. Entonces

$$X(t) \equiv X_0 \ \forall t$$

verifica (trivialmente)

$$X(t)' = (X_0)' = 0 = F(X_0) = F(X(t))$$

Es decir, es solución.

X_0 se llama punto de equilibrio

Si la ecuación es autónoma, se tiene la siguiente propiedad.

Prop Sean $X_1 : I_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $X_2 : I_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dos soluciones maximales. Entonces, o bien

$$Im(X_1) \cap Im(X_2) = \emptyset$$

o bien

$$Im(X_1) = Im(X_2)$$

Las curvas integrales no se cortan.

A los puntos de equilibrio nos podemos acercar (o alejar), pero nunca llegamos.

Curvas integrales

Dem. si $Im(X_1) \cap Im(X_2) = \emptyset$ no hay nada que decir.

Si no, existen t_1, t_2 tales que

$$X_1(t_1) = X_0 = X_2(t_2)$$

Definamos

$$\widetilde{X}(t) := X_2(t - t_1 + t_2)$$

Vemos que X_1 y $\tilde{X}$ son soluciones de

$$\begin{cases} X' = F(X), \\ X(t_1) = X_0, \end{cases}$$

$\Rightarrow X_1(t) = \tilde{X}(t)\ \forall t$, y claramente

$$Im(X_2) = Im(\widetilde{X}) = Im(X_1)$$

Teorema [Estabilidad Lineal] F un campo C^1 en $\mathbb{R}^2$, $F(X_0) = (0,0)$. Si $A = DF(X_0)$ no tiene autovalores con parte real 0, el diagrama de fases del sistema

$$X' = F(X)$$

en un entorno de X_0 es localmente conjugado (muy parecido) al diagrama de fases del sistema

$$Y' = AY$$

cerca de $Y_0 = 0$.

Para análisis local, estudiamos los sistemas lineales.

Comportamiento por cambio de base:

$X(t)$ una curva solución de

$$X' = AX$$

$C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz inversible (cte), $Y := CX$
¿Es Y solución de algún sistema lineal? ¿de cuál?

$$Y' = (CX)' = CX' = CAX$$

pero

$$= CAX = CAC^{-1}CX = CAC^{-1}Y$$

Si $\widetilde{A} = CAC^{-1}$ entonces Y es solución de

$$Y' = \widetilde{A}Y$$

En 2×2: se distinguen los casos

- 2 autovalores reales $(++, --, \pm)$,
- dos autovalores complejos (Re $>$0, Re$<$0).
- un autovalor real con multiplicidad,

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, a menos de cambio de base

1) A tiene dos autovalores reales $\lambda \neq \mu$

$$A \rightsquigarrow CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

2) A tiene un sólo autovalor real

2a) diagonalizable $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

2b) no diagonalizable $\Rightarrow CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

3) A tiene autovalor complejo no real $z = a + bi$ $(b \neq 0)$

$$A \rightsquigarrow CAC^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ o bien } UAU^{-1} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix}$$

Por las aplicaciones del Teorema de estabilidad lineal,
nos concentraremos en los casos λ, μ, a no nulos.

Caso 1: A tiene dos autovalores reales $\lambda \neq \mu$

$$A \rightsquigarrow CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

A menos de cambio de base, el sistema está desacoplado:

$$\begin{cases} y_1' & = & \lambda y_1 \\ y_2' & = & \mu y_2 \end{cases} \Rightarrow (y_1, y_2) = (c_1 e^{\lambda t}, c_2 e^{\mu t})$$

Si $c_1 = 0$, $(y_1, y_2) = (0, c_2 e^{\mu t})$ parametriza (semi)recta coordenada.
Si $c_2 \neq 0$:

$$y_1 = c_1 e^{\lambda t} \Rightarrow |y_1|^{\frac{\mu}{\lambda}} = (|c_1| e^{\lambda t})^{\frac{\mu}{\lambda}} = Cte(e^{\mu t}) = C y_2$$

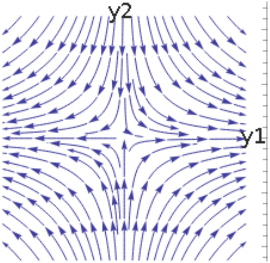
$$\boxed{\boxed{\therefore y_2 = Cte|y_1|^{\mu/\lambda}}}$$

Distinguimos los siguientes subcasos

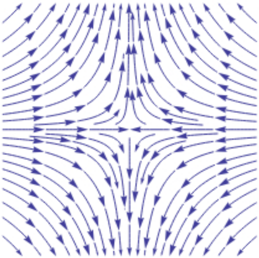
$$y_2 = Cte|y_1|^{\mu/\lambda}$$

$$\boxed{\mu/\lambda < 0} \iff sgn(\mu) \neq sgn(\lambda)$$

$\mu < 0 < \lambda$

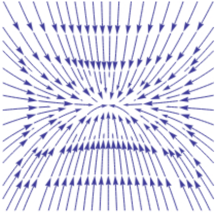


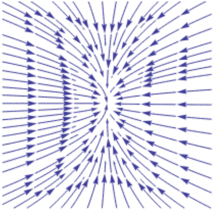
$\lambda > 0 < \mu$



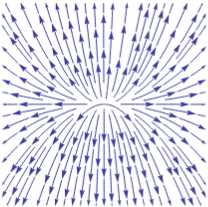
$\boxed{\mu/\lambda > 0}$ $\qquad$ $y_2 = Cte|y_1|^{\mu/\lambda}$

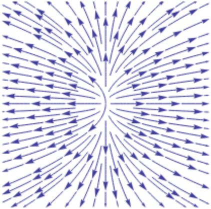
$|\mu| > |\lambda|$, ambos negativos, $|\mu| < |\lambda|$





$|\mu| > |\lambda|$, ambos positivos, $|\mu| < |\lambda|$

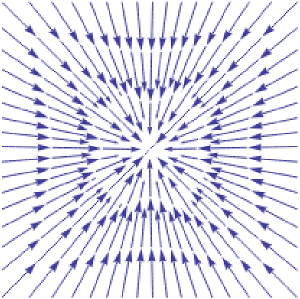




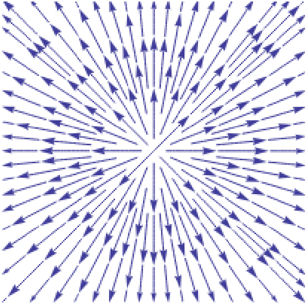
A tiene un sólo autovalor real
Caso diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad y_2 = Cte|y_1|^{\lambda/\lambda} = Cte|y_1|$$

$\lambda < 0$



$\lambda > 0$



Caso no diagonalizable, un autovalor λ

$\Rightarrow CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & \lambda y_1 \\ y_2' & = & y_1 + \lambda y_2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & c_1 e^{\lambda t} \\ y_2' & = & c_1 e^{\lambda t} + \lambda y_2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow y_2 = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda} t$$

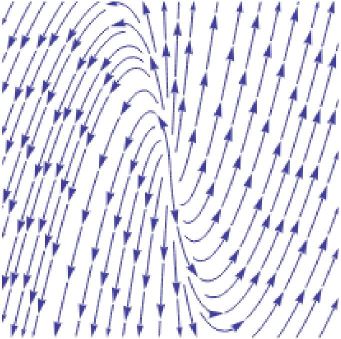
$c_1 = 0 \Rightarrow (y_1, y_2) = (0, c_2 e^{\lambda t})$ es el eje vertical.
Si $c_1 \neq 0$,

$$e^{\lambda t} = \frac{1}{|c_1|}|y_1|, \qquad \lambda t = \ln|y_1| - \ln|c_1|$$

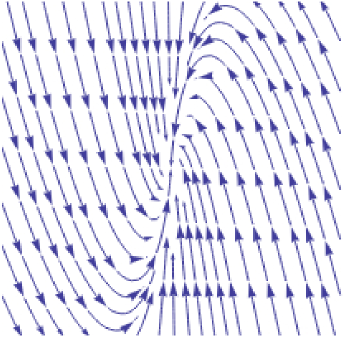
$$\therefore y_2 = y_1 \frac{\ln|y_1| - \ln|c_1|}{\lambda} + \frac{c_2}{c_1} y_1 = y_1 \left(\frac{1}{\lambda} \ln(|y_1|) + c\right)$$

$$y_2 = y_1\left(\frac{1}{\lambda}\ln(|y_1|) + c\right)$$

$\lambda > 0,$



$\lambda < 0$



A tiene autovalor complejo no real $z = a + bi$ $(b \neq 0)$

$$\begin{cases} y_1' &= & ay_1 + by_2 \\ y_2' &= & -by_1 + ay_2 \end{cases}$$

$$\boxed{y_1 = ce^{at}\cos(bt + \alpha_0)}$$

$$y_1' = c\Big(ae^{at}\cos(bt + \alpha_0) - be^{at}\operatorname{sen}(bt + \alpha_0)\Big)$$

$$y_1' = ay_1 + b\Big(-c\operatorname{sen}(bt + \alpha_0)\Big)$$

$$\Rightarrow y_2 = -ce^{at}\operatorname{sen}(bt)$$

$$\therefore (y_1(t), y_2(t)) = ce^{at}\big(\cos(bt + \alpha_0), -\operatorname{sen}(bt + \alpha_0)\big)$$

Son espirales, hacia afuera si $a > 0$, hacia adentro si $a < 0$.
Notar que el signo de b "no está determinado"