Análisis II - Matemática 3
Análisis Matemático II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 22 - 2do cuatrimestre 2021

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Diagramas de Fase

Teorema

$(A)_{ij} = a_{ij}(t)$, $(b)_i = b_i(t) : I \to \mathbb{R}$ continuas, consideramos el problema

$$X' = AX + b$$

Si $X_1, \ldots, X_n : I \to \mathbb{R}^n$ soluciones l.i. de $X' = AX$, entonces se obtiene una solución de $X' = AX + b$ con

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) X_i$$

donde las $c_i(t)$ son funciones que satisfacen

$$\left[X_1 \middle| \cdots \middle| X_n \right] \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = b$$

Sistemas no homogéneos

Ejemplo: solución general del siguiente sistema no homogéneo

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + e^t \\ x_2' = -6x_1 - 5x_2 + \dfrac{e^t}{\cos 2t} \end{cases}$$

Consideramos primero el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -6x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

1era versión: le asociamos una ec. de orden 2:

1era versión:

le asociamos una ec. de orden 2:

$$\begin{cases} x_1' &= & 4x_1 &+ & 3x_2 \\ x_2' &= & -6x_1 &- & 5x_2 \end{cases}$$

Usamos una ec. para despejar x_2 en función de x_1 y x_1'.

$$3x_2 = x_1' - 4x_1$$

$$\Rightarrow 3x_2' = x_1'' - 4x_1'$$

$$\Rightarrow 3(-6x_1 - 5x_2) = -18x_1 - 15x_2 = x_1'' - 4x_1'$$

$$\Rightarrow -18x_1 - 5(x_1' - 4x_1) = x_1'' - 4x_1'$$

$$\Rightarrow x_1'' + x_1' - 2x_1 = 0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{r^2 + r - 2 = 0} \rightsquigarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 2}}{2}$$

$$\rightsquigarrow x_1 = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$$

$$\rightsquigarrow x_2 = \frac{1}{3}(x_1' - 4x_1)$$

1era versión: le asociamos una ec. de orden 2:

$$\begin{cases} x_1' &= & 4x_1 &+& 3x_2 \\ x_2' &= & -6x_1 &-& 5x_2 \end{cases}$$

$$3x_2 = x_1' - 4x_1$$

$$x_1'' + x_1' - 2x_1 = 0$$

$$r^2 + r - 2 = 0$$

$$x_1 = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$$

$$x_2 = \frac{1}{3}(x_1' - 4x_1) = \frac{1}{3}\Big((c_1 e^t - 2c_2 e^{-2t}) - 4\Big(c_1 e^t + c_2 e^{-2t}\Big)\Big)$$

$$= -c_1 e^t - 2c_2 e^{-2t}$$

En notación vectorial

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \\ -c_1 e^t - 2c_2 e^{-2t} \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1era versión:

Si quisieramos la versión no homogénea:

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + e^t \\ x_2' = -6x_1 - 5x_2 + \dfrac{e^t}{\cos 2t} \end{cases}$$

"arrastramos" los términos no homogéneos en todos lados:

$$3x_2 = x_1' - 4x_1 - e^t$$

$$\rightsquigarrow 3x_2' = x_1'' - 4x_1' - e^t$$

pero también

$$3x_2' = 3\Big(-6x_1 - 5x_2 + \tfrac{e^t}{\cos 2t}\Big) = 3\Big(-6x_1 - 5\tfrac{1}{3}(\ldots) + \tfrac{e^t}{\cos 2t}\Big)$$

$$\rightsquigarrow x_1'' + x_1' - 2x_1 = f(t), \quad \text{etc.}$$

Segunda versión

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + e^t \\ x_2' = -6x_1 - 5x_2 + \dfrac{e^t}{\cos 2t} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \qquad X' = AX + b$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} e^t \\ \frac{e^t}{\cos 2t} \end{pmatrix},$$

observamos que si $Av = \lambda v$ y definimos

$$X(t) := e^{\lambda t} v$$

entonces verifica verifica

$$X'(t) = e^{\lambda t}\lambda v = e^{\lambda t} A v = A(e^{\lambda t} v) = AX$$

Segunda versión

Camino:

$$X' = AX + b$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} e^t \\ \frac{e^t}{\cos 2t} \end{pmatrix},$$

Caso fácil: hay dos autovalores reales diferentes $\lambda_1 \neq \lambda_2$
$\Rightarrow$ hay dos autovectores l.i. $v_1 \neq 0 \neq v_2$, $Av_i = \lambda_i v_i$

$$X_1 = e^{\lambda_1 t} v_1, \quad X_2 = e^{\lambda_2 t} v_2$$

es base de sol. del homogéneo.

$$\chi_A(r) = \det(\lambda \mathrm{Id} - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -3 \\ 6 & \lambda + 5 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = \boxed{\lambda^2 + \lambda - 2}\;!$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$.

Segunda versión

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ -6+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \quad X_2 = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

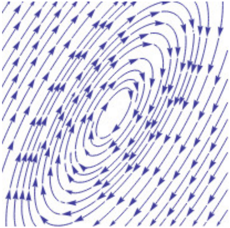
$$\left[X_1 \middle| \cdots \middle| X_n \right] \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = b \leftrightarrow \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} \\ -e^t & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ \frac{e^t}{\cos 2t} \end{pmatrix}$$

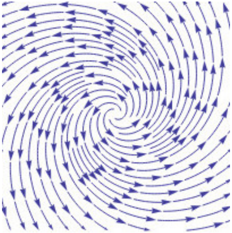
...

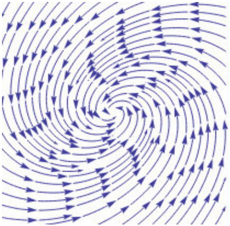
Visualizando soluciones: Diagramas de fase

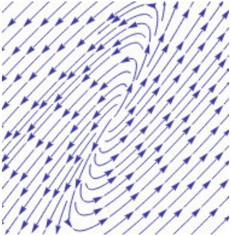
$$X' = AX, \quad X(t_0) = v_0$$

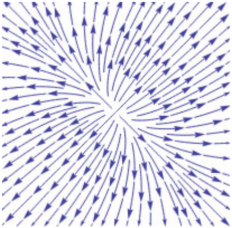
Para cada v_0, ¿Cómo es la curva $X(t)$?

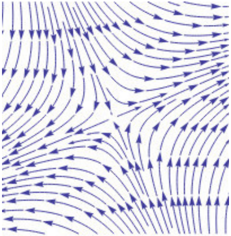












Ejemplo:

$$\begin{cases} x' &= & y \\ y' &= & -x \end{cases}$$

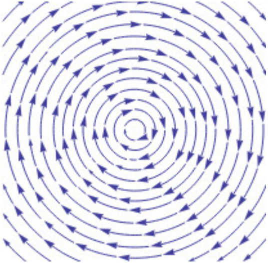
$$x' = y \quad \Rightarrow \quad x'' = y' \quad \Rightarrow \quad x'' = -x$$

$$x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t),$$

$$y(t) = x' = -c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t)$$

Si $c_2 = 0$,

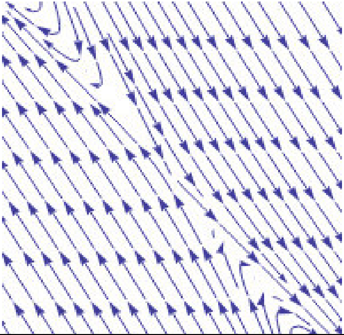
$$X(t) = c_1(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$$

son círculos 

Ejemplo: $\begin{cases} x_1' &= 4x_1 &+ 3x_2 \\ x_2' &= -6x_1 &- 5x_2 \end{cases}$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^t + c_2e^{-2t} \\ -c_1e^t - 2c_2e^{-2t} \end{pmatrix} = c_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Si $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ entonces $X(t) = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \infty$



Si $X_0 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

con $c_1 \neq 0$ entonces $X(t) \longrightarrow \infty$

Comportamiento asintótico de las soluciones

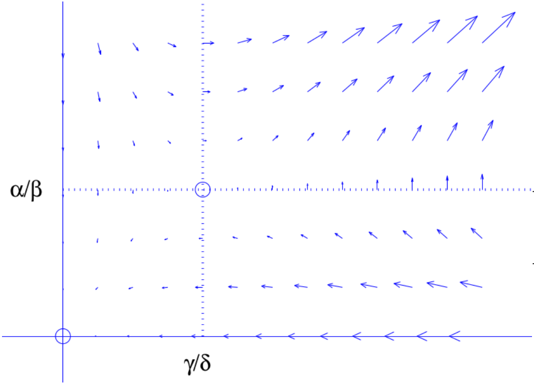
Ejemplo Consideremos un modelo de dos poblaciones **simbióticas**,

$$\begin{cases} x'(t) = (-\alpha + \beta y(t))\, x(t) \\ y'(t) = (-\gamma + \delta x(t))\, y(t) \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

Son dos poblaciones x e y que decrecen con razón de crecimiento constante en ausencia de la otra especie y cuya razón de crecimiento crece en forma proporcional a la otra población.

Las flechas del campo $F(x,y) = \big((-\alpha+\beta y)\,x, (-\gamma+\delta x)\,y\big)$ son aproximadamente

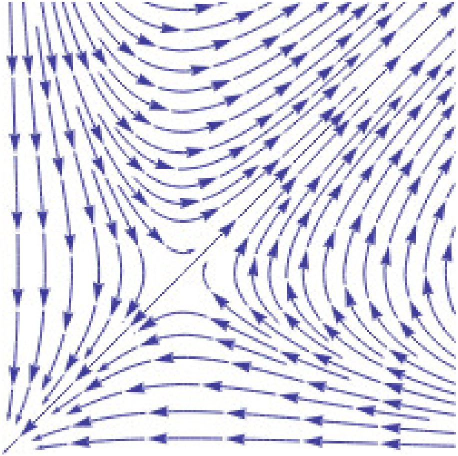


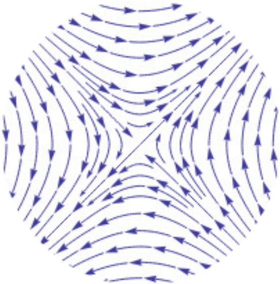
$$F(0,0) = (0,0),$$

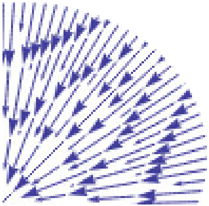
$$F(\gamma/\delta, \alpha/\beta) = (0,0)$$

¿Qué sucede cerca de los puntos de equilibrio?
¿Se llega alguna vez al equilibrio?
¿Se tiende al equilibrio?
Cerca del equilibrio $F \approx$ un campo lineal. Dibujemos primero los diagramas de sistemas lineales.

Sistema simbiótico: Comparación con la linealización







$X(t)$ cerca de $X_0 \Rightarrow X(t) - X_0$ es parecido a la solución $Y(t)$ del linealizado cerca de $Y_0 = 0$.

Teorema [Estabilidad Lineal] F un campo C^1 en $\mathbb{R}^2$, $F(X_0) = (0,0)$. Si $A = DF(X_0)$ no tiene autovalores con parte real 0, el diagrama de fases del sistema

$$X' = F(X)$$

en un entorno de X_0 es localmente conjugado (muy parecido) al diagrama de fases del sistema

$$Y' = AY$$

cerca de $Y_0 = 0$.