Análisis II - Matemática 3
Análisis Matemático II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 21 - 2do cuatrimestre 2021
Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas

Ecuación lineal no homogénea

$$x'' + px' + qx = f$$

Caso fácil:
p, q ctes, f "fácil":

- un polinomio,
- una exponencial,
- seno coseno,
- un producto de las anteriores.

Ecuación lineal no homogénea

Ejemplo exponencial:

$$x'' + px' + qx = e^{\lambda t}$$

Proponemos

$$x_p = Ae^{\lambda t}$$

Llamemos $L(x) = x'' + px' + qx$.

$$\Rightarrow L(e^{\lambda t}) = L(e^{\lambda t}) = (\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda t}$$

Si $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ (o sea $e^{\lambda t}$ no es sol. del hom.)

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{1}{\lambda^2 + p\lambda + q} e^{\lambda t}$$

Subejemplo: $x'' - x = e^{2t}$.

$$(e^{2t})'' - e^{2t} = 4e^{2t} \Rightarrow x_p(t) = \frac{1}{4} e^{2t}$$

$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{4} e^{2t} + Ae^{t} + Be^{-t}$$

Ecuación lineal no homogénea

Ejemplo polinomial:

$$x'' + px' + qx = t^2 + 3$$

Proponemos

$$x_p = at^2 + bt + c, \qquad x' = 2at + b, \quad x'' = 2a$$

$$\Rightarrow x'' + px' + qx = 2a + p(2at + b) + q(at^2 + bt + c)$$

$$= qat^2 + (2ap + qb)t + (2a + pb + qc) \stackrel{?}{=} t^2 + 3$$

despejo a, b, c.

Subejemplo: $x'' - x = t^2 + 3$.

$$(at^2 + bt + c)'' - (at^2 + bt + c) = 2a - at^2 - bt - c \stackrel{?}{=} t^2 + 3$$

$$\Rightarrow a = -1, \quad b = 0, \quad c = -5$$

$$\therefore x(t) = -t^2 - 5 + Ae^t + Be^{-t}$$

Caso general

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = f(t)$$

Supongamos conocida $x_1(t)$, $x_2(t)$ sol. del HOMOGENEO

Teorema (método de variación de las ctes)

Existe una solución particular de la forma

$$x_p = A(t)x_1 + B(t)x_2$$

A y B son tales que A' y B' son soluciones del sistema lineal

$$\begin{array}{ccccc} x_1 A' & + & x_2 B' & = & 0 \\ x_1' A' & + & x_2' B' & = & f \end{array}$$

Notar

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} = W \neq 0$$

Demostración 1:

$$x_p' = A'x_1 + Ax_1' + B'x_2 + Bx_2'$$
$$x_p'' = A''x_1 + 2A'x_1' + Ax_1'' + B''x_2 + 2B'x_2' + Bx_2''$$

$$x_p'' + Px_p' + Qx_p = A''x_1 + 2A'x_1' + Ax_1'' + B''x_2 + 2B'x_2' + Bx_2''$$

$$+P(A'x_1 + Ax_1' + B'x_2 + Bx_2') + Q(Ax_1 + BX_2)$$

$$= A''x_1 + B''x_2 + 2A'x_1' + 2B'x_2' + P(A'x_1 + B'x_2) = (*)$$

Pinta la condición $A'x_1 + B'x_2 = 0 \Rightarrow (A'x_1 + B'x_2)' = 0$

$$\rightsquigarrow A''x_1 + B''x_2 = -A'x_1' - B'x_2'$$

$$\Rightarrow (*) = A'x_1' + B'x_2' = f$$

Demostración 2:
Usando sistemas:

$$X' = AX + b$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 1 \\ \text{-}a_0 & \text{-}a_1 & & \cdots & \text{-}a_{n\text{-}1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$

Por ej. en 2×2, $\; x'' + a_1 x' + a_0 x = f \rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \text{-}a_0 & \text{-}a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -a_0 x - a_1 x' + f \end{pmatrix}$$

Matrices y combinaciones lineales:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

si los v_i son vectores columnas, definimos la matriz V por

$$V = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{array}\right]$$

Entonces

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{array}\right] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_i c_i \left[v_i \right]$$

Volvemos a sistemas

$$X' = AX + b$$

$X_1, \ldots, X_n$ una base de soluciones, $[W] = [X_1|\cdots|X_n]$
Si el sistema que viene de una ecuación, es la matriz Wronskiana.

$$\left[X_1 \middle| \cdots \middle| X_n \right] \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_i c_i \left[X_i \right] =: X$$

$$X' = \sum_i c_i' X_i + \sum_i c_i X_i' \stackrel{?}{=} AX + b$$

$$= \left[X_1 \middle| \cdots \middle| X_n \right] \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} + AX \quad \Rightarrow \quad \left[X_1 \middle| \cdots \middle| X_n \right] \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = b$$

Podemos ver el caso particular de ec. de orde 2, y el caso general de sistemas.
Caso $x'' + P(t)x' + Q(t)x = f(t)$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Si x_1, x_2 son dos soluciones del homogeneo, c_1 y c_2 soluciones de

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} x_2' & -x_2 \\ -x_1' & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

es decir

$$c_1' = -\frac{x_2}{W} f, \qquad c_2' = \frac{x_1}{W} f$$

en $n \times n$ podemos concluir el resultado para sistemas en general

Teorema

$(A)_{ij} = a_{ij}(t)$, $(b)_i = b_i(t) : I \to \mathbb{R}$ continuas, consideramos el problema

$$X' = AX + b$$

Si $X_1, \ldots, X_n : I \to \mathbb{R}^n$ soluciones l.i. de $X' = AX$, entonces se obtiene una solución de $X' = AX + b$ con

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) X_i$$

donde las $c_i(t)$ son funciones que satisfacen

$$\left[X_1 \middle| \cdots \middle| X_n \right] \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = b$$