Análisis II - Matemática 3
Análisis Matemático II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 20 - 2do cuatrimestre 2021
Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden 2

Teorema: $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, $a_{ij}(t)$ continuas en I, $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. El conjunto de las soluciones del sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas

$$X' = A(t)X$$

es **un espacio vectorial de dimensión n**.

El problema de la ecuación

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

$a_i = a_i(t)$, o convertimos en sistema:
$X = (x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)})$ es solución del sistema

$$\begin{cases} x_0' = x_1, \\ x_1' = x_2, \\ \vdots \\ x_{n-2}' = x_{n-1}, \\ x_{n-1}' = -a_0 x_0 - a_1 x_1 - \cdots - a_{n-1}x_{n-1} \end{cases}$$

es de la forma $X' = AX$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

Tenemos una biyección

$$\text{soluciones del sistema} \quad \leftrightarrow \quad \text{soluciones de la ecuación}$$

$$X' = A \cdot X \qquad\qquad x^{(n)} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}$$

$$\begin{aligned} X(t) &= (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ &= (x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}) \quad \leftrightarrow \quad x(t) \end{aligned}$$

$\therefore$ las funciones soluciones de $x^{(n)} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}$ es un subespacio

de $C^1(a,b)$ de dimensión n

El Wronskiano

Si $x_1(t)$, ... , $x_n(t)$ son funciones, se define el Wronskiano:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) := \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1' & x_2' & \cdots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \cdots & x_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Fijamos una ecuación

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$$

y supongamos x_i todas soluciones de esa ecuación.

Las funciones $\{x_1, \dots, x_n\}$ forman una base de soluciones

$\Leftrightarrow$ son l.i. $\Leftrightarrow W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t_0) \neq 0$ para cierto (todo) t_0,

Propiedad

$r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ todos distintos, entonces $\{e^{r_1 t}, e^{r_1 t}, \ldots, e^{r_n t}\}$ es l.i.

El Wronskiano es

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1' & x_2' & \cdots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \cdots & x_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} & \cdots & e^{r_n t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} & \cdots & r_n e^{r_n t} \\ r_1^2 e^{r_1 t} & r_2^2 e^{r_2 t} & \cdots & r_n^2 e^{r_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 t} & r_2^{n-1} e^{r_2 t} & \cdots & r_n^{n-1} e^{r_n t} \end{pmatrix}$$

evaluando en $t = 0 \rightsquigarrow$ Van der Monde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{pmatrix} = \pm \prod_{i<j} (r_i - r_j)$$

Caso $n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = b - a \neq 0$$

Caso $n = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \Big((b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) \Big)$$

$$= (b-a)(c-a)\Big((c+a) - (b+a) \Big) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Si

$$0 = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \cdots + c_n e^{r_n t}$$

$$\Rightarrow 0 = r_1 c_1 e^{r_1 t} + r_2 c_2 e^{r_2 t} + \cdots + r_n c_n e^{r_n t}$$

pero también

$$\Rightarrow 0 = r_1 c_1 e^{r_1 t} + r_1 c_2 e^{r_2 t} + \cdots + r_1 c_n e^{r_n t}$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + (r_2 - r_1) c_2 e^{r_2 t} + \cdots + (r_n - r_1) c_n e^{r_n t}$$

Recursivamente, $(r_i - r_1) c_i = 0$ para todo $i = 2, \ldots, n$.

si algún $c_i \neq 0 \Rightarrow r_i - r_1 = 0$ absurdo! $\Rightarrow c_2 = \cdots = c_n = 0$

$$\Rightarrow c_1 e^{r_1 t} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

Aplicación:

si consideramos la ecuación

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots a_2x'' + a_1x' + a_0x = 0$$

con los a_i constantes y $p(r)$ es el polinomio

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0$$

$\forall$ raíz tenemos una solución, y son todas l.i.

¿Qué hacer cuando hay raíces múltiples?

Resultado general: reducción de orden..

Reducción de orden

Consideremos una ec. de orden 2

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

y supongamos x_1 es una solución (no nula). Proponemos $x = fx_1$. Entonces

$$x' = f'x_1 + fx_1'$$

$$x'' = (f'x_1 + fx_1') = f''x_1 + 2f'x_1' + fx_1''$$

ahora

$$\begin{aligned} 0 &= x'' + ax' + bx \\ &= f''x_1 + 2f'x_1' + fx_1'' + a(f'x_1 + fx_1') + bfx_1 \\ &= f''x_1 + 2f'x_1' + af'x_1 + f(x_1'' + ax_1' + bx_1) \\ &= f''x_1 + 2f'x_1' + af'x_1 \end{aligned}$$

se convierte en

$$0 = f'' + (2\frac{x_1'}{x_1} + a)f'$$

es una ecuacion de orden 1 en f'

$$0 = f'' + (2\frac{x_1'}{x_1} + a)f'$$

es una ecuación de orden 1 en f':

$$(f')' = -(2\frac{x_1'}{x_1} + a)f'$$

La solucion $f' = 0$ ($f = cte \Rightarrow x = ctex_1$) no nos interesa..

$$\Rightarrow f' = \exp\Big(\int -(2\frac{x_1'}{x_1} + a)\Big)$$

$$= \exp\Big(-2\ln(x_1) - \int a\Big) = \frac{e^{-\int a}}{x_1^2}$$

$$\Rightarrow f = \int \frac{e^{-\int a}}{x_1^2}$$

$$\Rightarrow x = fx_1 = x_1 \int \frac{e^{-\int a}}{x_1^2}$$

Ejemplo: pongamos $a, b \in \mathbb{R}$ y la ecuación

$$x'' + ax' + bx = 0$$

y supongamos que tiene una raíz doble:

$$r^2 + ar + b = (r - \lambda)^2 = r^2 - 2\lambda r + \lambda^2$$

Es decir, la ec. es de la forma

$$x'' - 2\lambda x' + \lambda^2 x = 0$$

La función $x_1(t) = e^{\lambda t}$ es solución. Proponemos

$$x(t) = f(t)e^{\lambda t}$$

$$x'' - 2\lambda x' + \lambda^2 x = 0$$
$$x(t) = f e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow x' = f' e^{\lambda t} + f \lambda e^{\lambda t}$$
$$\Rightarrow x'' = f'' e^{\lambda t} + 2 f' \lambda e^{\lambda t} + f \lambda^2 e^{\lambda t}$$
$$\Rightarrow x'' - 2\lambda x' + \lambda^2 x =$$
$$= (f'' e^{\lambda t} + 2 f' \lambda e^{\lambda t} + f \lambda^2 e^{\lambda t}) - 2\lambda (f' e^{\lambda t} + f \lambda e^{\lambda t}) + \lambda^2 f e^{\lambda t}$$
$$= f'' e^{\lambda t}$$

$f'' \equiv 0 \Rightarrow f(t) = at + b$

$$\therefore x(t) = (at + b) e^{\lambda t} = a t e^{\lambda t} + b e^{\lambda t}$$

Una base de soluciones es $\{x_1 = e^{\lambda t}, x_2 = t e^{\lambda t}\}$

Hecho

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ constantes. Si λ es raíz de polinomio

$$p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_2r^2 + a_1r + a_0r$$

con multiplicidad $m > 1$,
entonces

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t}$$

son funciones (l.i.) soluciones de la ec. dif.

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_2x'' + a_1x' + a_0x = 0$$

Raices complejas

Sean a_1, a_0 constantes tales que

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

tiene una raíz compleja $z = \alpha + i\beta$.

Si tuviera sentido e^{tz}

$$x(t) = e^{zt}, \quad x' = ze^{zt}, \quad x'' = z^2 e^{zt}$$

$$\Rightarrow x'' + a_1 x' + a_0 x = z^2 e^{zt} + a_1 z e^{zt} + a_0 e^{zt}$$
$$= (z^2 + a_1 z + a_0) e^z = 0$$

¿Quién es e^{zt}?

[R. Cotes 1682-1716, pub. p.m. 1722] - [L. Euler: 1707-1783]

$$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i\,\mathrm{sen}(\beta)$$

$$\therefore e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\,\mathrm{sen}(\beta))$$

Ejercicio:

$$(e^{(\alpha+i\beta)t})' = \Big(e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\,\mathrm{sen}(\beta t))\Big)'$$

$$= (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\,\mathrm{sen}(\beta t))$$

Recuerdo

$$(a+ib)(c+id) = ac + ibid + ibc + aid = ac - bc + i(bc + ad)$$

$$\Big(e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\,\mathrm{sen}(\beta t))\Big)' = \Big(e^{\alpha t}\cos(\beta t)\Big)' + i\Big(e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)\Big)' =$$

$$= \alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t) + i\Big(\alpha e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t) + \beta e^{\alpha t}\cos(\beta t)\Big)$$

$$= (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\,\mathrm{sen}(\beta t)) \checkmark$$

Observamos que

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

si $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $r = \alpha + i\beta$ es raíz, entonces $\alpha - i\beta$ también.
Vale

$$x_2(t) = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(-\beta t) + i\,\mathrm{sen}(-\beta t))$$
$$= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\,\mathrm{sen}(\beta t)) = \overline{e^{(\alpha + i\beta)t}} = \overline{x_1(t)}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \mathbb{R}\mathrm{e}\left(e^{(\alpha + i\beta)t}\right) = \boxed{e^{\alpha t}\cos(\beta t)}$$

es solución, idem $\boxed{e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)}$

$$\therefore x(t) = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t) + Be^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$$

Ejemplo: $x'' + 4x' + 5x = 0$

planteamos

$$r^2 + 4r + 5 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad r = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = -2 \pm i$$

$$\therefore x(t) = Ae^{-2t}\cos(t) + Be^{-2t}\operatorname{sen}(t)$$

$$x(0) = A, \quad x'(0) = -A + B$$

Lineales No homogeneas:

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t)$$

x_1, x_2 base de soluciones del homogéneo,
x_p solución particular

$\Rightarrow$ la sol. gral. es

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) + x_p(t)$$

Métodos..