Análisis II - Matemática 3
Análisis Matematico II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 2 - 2do cuatrimestre 2021
Rectas tangentes

Curvas

Definición Una curva $\mathcal{C}$ se dice "simple, abierta" si no se corta a si misma. Más precisamente, si admite una parametrización $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ que es inyectiva en $[a, b]$.

Definición Una curva $\mathcal{C}$ se dice "simple, cerrada" si admite una parametrización $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ que es inyectiva en $[a, b)$ y con $\sigma(a) = \sigma(b)$.

Recta tangente

Definición: Sea $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ una curva simple con σ de clase C^1, $t_0 \in (a, b)$, llamemos

$P := \sigma(t_0)$
$v := \sigma'(t_0)$.

Si $v \neq 0$, asignamos a estos datos una recta

$$L := \{P + (t - t_0)v : t \in \mathbb{R}\}$$

Se denomina la **recta tangente** a σ en P.

Curvas

Una curva puede no ser abierta ni cerrada.

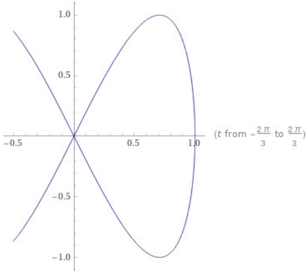


Figura: $\sigma(t) = (cos(t), sen(2t))$ con $t \in [-2\pi/3, 2\pi/3]$

Vamos a trabajar con curvas que se puedan escribirse como union finita de curvas abiertas y/o cerradas que se intersecan -de a dos en dos- a lo sumo en un solo punto.

Curvas

Concatenación: si $\sigma_1 : [a, b] \to \mathcal{C}_1$ y $\sigma_2 : [b, c] \to \mathcal{C}_2$ son parametrizaciones de dos curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ tales que $\sigma_1(b) = \sigma_2(b)$ entonces $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ es una curva que admite una parametrización dada por la función partida (y continua) $\sigma(t) : [a, c] \to \mathcal{C}$ dada por

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(t), \text{ si } t \in [a, b] \\ \sigma_2(t), \text{ si } t \in [b, c] \end{cases} \quad .$$

Curvas

Definicion Sea $\mathcal{C}$ una curva que admite una parametrización $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ y sea

$$h : [a, b] \to [c, d]$$

una biyección continua, entonces tenemos

$$h^{-1} : [c, d] \to [a, b].$$

Si definimos $\tilde{\sigma} : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\tilde{\sigma}(\tau) = \sigma\big(h^{-1}(\tau)\big)$. Entonces, $\tilde{\sigma}$ es una parametrización de $\mathcal{C}$. Decimos que $\tilde{\sigma}$ es una "reparametrización de σ".

Recta Tangente y Suavidad

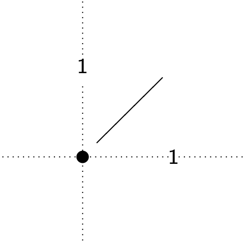
Definición Una parametrización $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$, de clase $C^1([a, b])$ con $\sigma'(t) \neq (0, 0, 0)$ para todo $t \in [a, b]$ y que cumple una de las siguientes condiciones

1. σ es inyectiva en $[a, b]$, o bien
2. σ es inyectiva en $[a, b)$, $\sigma(a) = \sigma(b)$ y $\sigma'(a) = \sigma'(b)$ (derivadas laterales).

se denomina *parametrización regular* de un curva abierta o cerrada respectivamente.

Definición [Curva Suave] Una curva $\mathcal{C}$, abierta o cerrada, que admite una parametrización regular se dice *suave*.

Ejemplo:



$$\sigma_1(t) = (t^2, t^2), \qquad t \in [0,1] \qquad \text{X}$$

$$\sigma_2(t) = (t, t), \qquad t \in [0,1] \qquad \checkmark$$

Recta Tangente y Suavidad

Reparametrizacion Si $\mathcal{C}$ una curva abierta, simple, suave, $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Sea $\phi : [c, d] \to [a, b]$ una biyección C^1 con $\phi'(\tau) \neq 0$ para todo $\tau \in [c, d]$.

La reparametrización $\tilde{\sigma} : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\tilde{\sigma}(\tau) = \sigma\big(\phi(\tau)\big)$$

es una parametrización regular de $\mathcal{C}$.

Para $\sigma(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$,

$$\widetilde{\sigma}(\tau) = (X(\phi(\tau)), Y(\phi(\tau)), Z(\phi(\tau)))$$

entonces

$$\frac{d}{d\tau}\widetilde{\sigma}(\tau) = \Big(\frac{d}{d\tau}X(\phi\tau), \frac{d}{d\tau}Y(\phi\tau), \frac{d}{d\tau}Z(\phi\tau)\Big)$$

$$= \big(X'(\phi\tau)\phi'(\tau), Y'(\phi\tau)\phi'(\tau), Z'(\phi\tau)\phi'(\tau)\big)$$
$$= \phi'(\tau)\sigma'(\phi\tau)$$

Si $\phi(\tau_0) = t_0$ y $\sigma(t_0) = P_0$, entonces

$$\frac{d}{d\tau}\widetilde{\sigma}(\tau_0) = \phi'(\tau_0)\sigma'(t_0)$$

El vector velocidad cambia por un múltiplo escalar no nulo. La recta tangente a $\mathcal{C}$ en P_0 no depende de la reparametrización.

Ejemplo

Consideremos la trayectoria

$$\sigma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \qquad t \geq 0$$

si en $t_0 = 3/2$ se "suelta" y sigue por la tangente, donde estamos en $t = 2$?

y si se hubiera "soltado" en $t_0 = 1$?

Cómo son las parametrizaciones en cada caso?