Análisis II - Matemática 3
Análisis Matemático II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 19 - 2do cuatrimestre 2021
Ecuaciones diferenciales ordinarias - Sistemas lineales

Existencia y unicidad de solución

Teorema [de $\exists$ y ! de Picard]

$I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto.
$F(t, X) : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo localmente Lipschitz en la variable X en $I \times \Omega$.
$t_0 \in I^0$, $\xi_0 \in \Omega$.

Entonces, existen $\lambda > 0$ y $X : [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda] \subset I \to \Omega$ de clase C^1

$$X(t) = (x_1(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

tales que

$$X'(t) = F(t, X(t)), \quad \text{para todo } t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda],$$
$$X(t_0) = \xi_0.$$

Condición Lipschitz

Ejemplo importante:

$$F(t, X) = A(t) \cdot X + b(t)$$

con $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b(t) \in \mathbb{R}^n$.

Si los $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ son continuos $\Rightarrow F(t, X)$ es loc. Lipschitz en X.

Hecho: Si $X' = A(t) \cdot X + b(t)$ y $X(t_0) = X_0$ entonces la solución $X(t)$ está definida en donde están definidas $A(t)$ y $b(t)$.

dem: $\|F(t,X)-F(t,Y)\| =$

$$= \left\| \Big(A(t)\cdot X + b(t)\Big) - \Big(A(t)\cdot Y + b(t)\Big) \right\| = \|A\cdot(X-Y)\|$$

$$\Rightarrow \|F(t,X)-F(t,Y)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)(x_j-y_j)\Big)^2$$

Si en $J\subset\mathbb{R}$ valle $|a_{ij}(t)|\leq C \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)(x_j-y_j)\Big)^2 \leq$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} C|x_j-y_j|\Big)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} C\|X-Y\|\Big)^2 = cte\|X-Y\|^2$$

por ej, $cte = n^2\,\text{máx}\{a_{ij}(t)\}$

Generalidades y sistemas homogéneos

Teorema: $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, $a_{ij}(t)$ continuas en I, $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El conjunto de las soluciones del sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas

$$X' = A(t)X$$

es **un espacio vectorial de dimensión n**.

dem: Hecho clave: $X_1(t)$ y $X_2(t)$ soluciones, a, b constantes, entonces

$$X(t) := aX_1(t) + bX_2(t)$$

es solución de $X' = A \cdot X$, pues

$$(aX_1 + bX_2)' = aX_1' + bX_2'$$

$$A \cdot (aX_1 + bX_2) = aA \cdot X_1 + bA \cdot X_2$$

$\mathcal{S} := \{X : I \to \mathbb{R}^n : X' = A \cdot X\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Definimos $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ la transformación lineal

$$T(X) := X(t_0)$$

Afirmación: El Teorema de $\exists!$ dice que T es (lineal y) biyectiva!

Corolario

Sean $\{X_1, \ldots, X_n\}$ soluciones y sea $t_0 \in I$ cualquiera. Entonces $\{X_1, \ldots, X_n\}$ son linealmente independientes como funciones de t en I si y sólo si los vectores $\{X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0)\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.

Ecuaciones no homogéneas

Caso 1-ecuación:

$$x' = a(t)x + b(t)$$

El sistema homogéneo asociado es

$$x' = a(t)x$$

tiene solución

$$x_h(t) = e^{A(t)}$$

donde $A'(t) = a(t)$. ¿Ayuda para el no-homogéneo?
Notar

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1' & = & ax_1 + b \\ x_2' & = & ax_2 + b \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1 - x_2)' = a(x_1 - x_2)$$

$$\therefore x(t) = x_h + x_p$$

x_h ✓
$x_p = ?$

Proponemos $\boxed{x(t) = f(t)x_h(t)}$ entonces

$$x' = f'x_h + fx_h' = f'x_h + fax_h = f'x_h + ax$$

$$\overset{?}{=} ax + b(t)$$

Buscamos f tal que

$$f'x_h = b \quad \rightsquigarrow \quad f = \int \frac{b}{x_h} dt = \int be^{-A} dt$$

$$\therefore x(t) = x_h(t)f(t) = e^{A(t)} \int b(t)e^{-A(t)} dt$$

$$= Ce^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)} ds$$

donde $A'(t) = a(t)$.

Ejemplo:

$$x' = x + t$$

$x_h = x_h \Rightarrow x_h = e^t$. Busco f tal que

$$x(t) = f(t)e^t$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x' & = & f'e^t + fe^t \\ x + t & = & fe^t + t \end{array}\right\} \Rightarrow f'e^t = t \Rightarrow f' = te^{-t}$$

$$f = (at+b)e^{-t} \Rightarrow f' = ae^{-t} - (at+b)e^{-t}$$

$$= (a - at - b)e^{-t} \Rightarrow a = -1, b = -1 \text{ anda}$$

$$x_p(t) = e^t(-t-1)e^{-t} = -t - 1$$

$$x_p' = -1,\ x_p + t = (-t-1) + t = -1 \checkmark$$

solución general?

$$x = Cx_h + x_p = Ce^t - t - 1$$

Ecuaciones de orden n

Consideramos la ecuación

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = f.$$

$a_i = a_i(t)$, $f = f(t)$. Lo convertimos en sistema:

Ecuaciones de orden n

$X = (x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)})$ es solución del sistema

$$\begin{cases} x_0' = x_1, \\ x_1' = x_2, \\ \vdots \\ x_{n-2}' = x_{n-1}, \\ x_{n-1}' = -a_0 x_0 - a_1 x_1 - \cdots - a_{n-1} x_{n-1} + f. \end{cases}$$

es de la forma $X' = AX + b$.
Vemos primero el caso homogéneo:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

equivale a encontrar soluciones de

$$\begin{cases} x_0' = x_1, \\ x_1' = x_2, \\ \vdots \\ x_{n-2}' = x_{n-1}, \\ x_{n-1}' = -a_0 x_0 - a_1 x_1 - \cdots - a_{n-1} x_{n-1} \end{cases}$$

donde $X = (x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)})$.
Las soluciones forman un subespacio vectorial de dimensión n.
Quedan determinadas por una condición inicial $X(t_0)$, o equivalentemente, los datos

$$x(t_0), x'(t_0), x''(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)$$

Teorema $t_0 \in (a,b)$, $a_i(t) : (a,b) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n-1$ y $f(t) : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones continuas.

1. Para cada n-upla $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ $\exists!$ solución que satisface

$$x(t_0) = y_0,\ x'(t_0) = y_1,\ x''(t_0) = y_2,\ \cdots x^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}.$$

   La solución está definida en (a,b).

2. El conjunto de soluciones cuando $f = 0$ (ecuación lineal homogénea de orden n) **es un espacio vectorial de dimensión n**.

Ejemplo:
$$x''' - x' = 0$$

$x(t) = 1$ verifica.
$x(t) = e^t$ $(x' = x \Rightarrow x''' = x = x')$
y e^{-t} también ($x' = -x$, $x'' = -x' = x$, $x''' = x'$).

La solución general es

$$X(t) = A + Be^t + Ce^{-t}$$

pues $1, e^t, e^{-t}$ son soluciones,
son l.i.,
y el espacio solución tiene dimensión 3.

Ecuaciones de orden n homogéneas a coeficientes contantes:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n)} + \cdots + a_2x'' + a_1x' + a_0x = 0$$

Proponemos como solución $x(t) = e^{rt}$

$$\Rightarrow x^{(k)} = r^k e^{rt} = r^k x$$

$$\Rightarrow x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_2x'' + a_1x' + a_0x =$$

$$= r^n x + a_{n-1}r^{n-1}x + \cdots + a_2r^2x + a_1rx + a_0x$$

$$= \underbrace{(r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_2r^2 + a_1r + a_0)}_{p(r)}\, x \overset{?}{=} 0$$

$\therefore$ buscamos r tal que $p(r) = 0$.

Por ejemplo

$$x'' + 2x' - 15x = 0$$

Buscamos r tal que

$$r^2 + 2r - 15 = 0 \Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \Rightarrow r = -5, r = 3$$

$$\Rightarrow x(t) = Ae^{-5t} + Be^{3t}$$

Propiedad

$r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ todos distintos, entones

$$\{e^{r_1 t}, e^{r_1 t}, \ldots, e^{r_n t}\}$$

son l.i.

Caso $n = 2$: $f = e^{at}$, $g = e^{bt}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Supongamos $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$g(t) = c_1 e^{at} + c_2 e^{bt} = 0 \forall t$$

$$\Rightarrow 0 = g'(t) = a c_1 e^{at} + b c_2 e^{bt} \quad (\forall t)$$

Evaluando en $t = 0$

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$a c_1 + b c_2 = 0$$

Pero

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = b - a \neq 0$$

Caso $n = 3$: e^{at}, e^{bt}, e^{ct} $(a \neq b,\ a \neq c,\ c \neq b,\ a, b, c \in \mathbb{R})$.

$$\text{si } g(t) = c_1 e^{at} + c_2 e^{bt} + c_3 e^{ct} = 0 \forall t$$

$$\Rightarrow 0 = g'(t) = ac_1 e^{at} + bc_2 e^{bt} + cc_3 e^{ct}$$

$$\Rightarrow 0 = g''(t) = a^2 c_1 e^{at} + b^2 c_2 e^{bt} + c^2 c_3 e^{ct}$$

Evaluando en $t = 0$

$$\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 0 \\ ac_1 & + & bc_2 & + & cc_3 & = & 0 \\ a^2 c_1 & + & b^2 c_2 & + & c^2 c_3 & = & 0 \end{array}$$

Pero

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \Big((b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) \Big)$$

$$= (b-a)(c-a)\Big((c+a) - (b+a) \Big) = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

pues $a \neq b$, $a \neq c$, $c \neq b$.