Análisis II - Matemática 3
Análisis Matemático II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 18 - 2do cuatrimestre 2021
Ecuaciones diferenciales ordinarias - Existencia y unicidad local de soluciones

Existencia y unicidad de solución

Teorema $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f(t,x) : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y Lipschitz en la variable x en $I \times \mathbb{R}$. Sean $t_0 \in I^0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces existen $\lambda > 0$ y $x(t) : [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda] \subset I \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \text{para todo } t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda],$$
$$x(t_0) = x_0.$$

Paréntesis sucesiones, sucesiones de Cauchy:

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ se dice **de Cauchy** si

$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 : |a_n - a_m| < \epsilon$ si $n, m \geq n_0$.

Hechos:

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy $\Rightarrow$ es acotada
- $\Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente
- $\Rightarrow$ en realidad... $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ era una suc. convergente.

dem: Reformulación del problema:

$$\boxed{x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0}$$

equivale a

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds}$$

Existencia:

El método de la dem (existencia) es por aproximación. Definimos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= x_0, \\ x_2(t) &:= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\, ds \\ x_3(t) &:= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s))\, ds \\ &\vdots \\ x_{k+1}(t) &:= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\, ds \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observamos $x_k(t)$ es continua $\forall k$.
Consideramos $\boxed{\lambda = 1/2L}$ y llamamos

$$M_{k+1} = \text{máx}\big\{|x_{k+1}(t) - x_k(t)| : t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]\big\}$$

Veremos que $\exists C > 0$ tal que

$$|x_{k+m}(t) - x_k(t)| \leq \frac{C}{2^k} \quad (\forall n,\ \forall t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda])$$

En particular, para cada $t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$, la sucesión

$$\{x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

es convergente (porque es de Cauchy) y está definida la función

$$x(t) : [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda] \to \mathbb{R}$$

$$x(t) := \lim_{n \to \infty} x_n(t)$$

Detalle: $x(t)$ es continua y puedo calcular $\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$, pues

$$|x(t_1) - x(t_2)| = |x(t_1) - x_{n_0}(t_1) + x_{n_0}(t_1) - x_{n_0}(t_2) + x_{n_0}(t_2) - x(t_2)|$$

$$\leq |x(t_1) - x_{n_0}(t_1)| + |x_{n_0}(t_1) - x_{n_0}(t_2)| + |x_{n_0}(t_2) - x(t_2)|$$

Empezamos con $x_{k+1}(t) - x_k(t)$ (recordamos $\lambda = 1/2L$):

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\, ds,$$
$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{k-1}(s))\, ds,$$

$$\Rightarrow |x_{k+1}(t) - x_k(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \Big(f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s)) \Big) ds \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s))| ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x_k(s) - x_{k-1}(s)| ds \right|$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} M_k ds \right| = L|t_0 - t| M_k \leq L\lambda M_k = \frac{M_k}{2}$$

$$\Rightarrow M_{k+1} \leq \frac{M_k}{2}$$

$$\boxed{M_{k+1} \leq \frac{M_k}{2},\ \ \forall k}$$

$$\Rightarrow M_{k+1} \leq \frac{M_k}{2} \leq \frac{M_{k-1}}{2^2} \leq \frac{M_{k-2}}{2^3} \leq \cdots \leq \frac{M_2}{2^{k-1}} = \frac{C}{2^k}$$

$(C = 2M_2)$ Es decir,

$$\therefore\ \ M_{k+1} = \max \left\{ |x_{k+1}(t) - x_k(t)| : t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda] \right\} \leq \frac{C}{2^k}$$

Ahora

$$|x_{k+m}(t) - x_k(t)| =$$

$$= |x_{k+m}(t) - x_{k+m-1}(t) + x_{k+m-1}(t) \cdots - x_{k+1}(t) + x_{k+1}(t) - x_k(t)|$$

$$\leq |x_{k+m}(t) - x_{k+m-1}(t)| + |x_{k+m-1}(t) \cdots - x_{k+1}(t)| + |x_{k+1}(t) - x_k(t)|$$

$$\leq \quad M_{k+m} \quad + M_{k+m-1} + \quad \cdots \quad + \quad M_{k+1}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{m} M_{k+\ell} = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{C}{2^{k+\ell}} = \frac{C}{2^k} \sum_{\ell=1}^{m} \frac{1}{2^\ell} < \frac{C}{2^k} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} = \frac{C}{2^k}$$

Finalmente, para $t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$

$$\left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s)) - f(s, x(s))| ds \right|$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x_k(s) - x(s)| ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} \frac{C}{2^k} ds \right| \leq L\lambda \frac{C}{2^k} \quad \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\boxed{\therefore \quad \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))ds \quad \xrightarrow[k\to\infty]{} \quad \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds}$$

$$\begin{array}{ccc} x_{k+1}(t) & = & x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))ds \\ {\scriptstyle k\to\infty}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle k\to\infty} \\ x(t) & & x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \end{array}$$

Es decir, $x(t)$ es solución de la ec. integral.

Corolarios de $\exists!$ y $\lambda = 1/2L$

Coro 1:

I y f como en el Teorema, $t_0 \in I$ y $\xi \in \mathbb{R}$. Sean $t_0 \in J_1 \subset I$, $t_0 \in J_2 \subset I$ y $x_i : J_i \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2$ tales que

$$\begin{aligned} x_i' &= f(t, x_i) \quad \text{en } J_i, \\ x_i(t_0) &= \xi. \end{aligned}$$

Entonces, $x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in J_1 \cap J_2$.

Coro 2:

I y f como en el Teorema, f globalmente Lipschitz, entonces la solución está definida en todo I.