Análisis II - Matemática 3
Análisis Matemático II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 17 - 2do cuatrimestre 2021
Ecuaciones diferenciales ordinarias - Existencia y unicidad local de soluciones

Existencia y unicidad de solución

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

$$X'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t))$$

$$F(t, X) = \big(f_1(t, X), f_2(t, X), \dots, f_n(t, X)\big)$$

Veremos existencia y unicidad local de solución de

$$X' = F(t, X)$$

o bien

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_2'(t) &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Condición Lipschitz

Definición

$F(t, X) : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $I = [a, b]$, $\Omega \subseteq R^n$ un abierto.
Decimos que F es **Lipschitz** en la variable X si

F es continua en las variables t y X y

$\exists$ constante $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq L\|X - Y\|.$$

$\forall t \in I, \ \forall X, Y \in \Omega$

Condición Lipschitz

F es *localmente Lipschitz* en la variable X en $I \times \Omega$ si

para todo intervalo cerrado y acotado $J \subseteq I$ y todo conjunto cerrado y acotado $\Omega' \subseteq \Omega$ se tiene que F es Lipschitz en $J \times \Omega'$.

Ejemplo: $f(t,x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y $\frac{\partial f}{\partial x}$ continua. Entonces $\forall x_1 < x_2$ existe $x_1 < \widetilde{x} < x_2$ tal que

$$|f(t,x_2) - f(t,x_1)| = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(t,\widetilde{x})} |x_2 - x_1|$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}$ se asume continua, es acotada en compactos.

Existencia y unicidad de solución

Teorema [de $\exists$ y ! de Picard]

$I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. $F(t, X) : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo localmente Lipschitz en la variable X en $I \times \Omega$.
Sean $t_0 \in I^0$, $\xi_0 \in \Omega$.

Entonces, existen $\lambda > 0$ y $X(t) : [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda] \subset I \to \Omega$ de clase C^1 tales que

$$X'(t) = F(t, X(t)), \quad \text{para todo } t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda],$$
$$X(t_0) = \xi_0.$$

Existencia y unicidad de solución

Demostraremos la siguiente versión de una sola ecuación:

Teorema $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f(t,x) : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y Lipschitz en la variable x en $I \times \mathbb{R}$. Sean $t_0 \in I^0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces existen $\lambda > 0$ y $x(t) : [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda] \subset I \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \text{para todo } t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda],$$
$$x(t_0) = x_0.$$

dem: Reformulación del problema:

$$\boxed{x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0}$$

equivale a

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds}$$

Supongamos conocida la existencia, veamos unicidad:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds,$$

$$\widetilde{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\widetilde{x}(s))ds$$

$$\Rightarrow |x(t) - \widetilde{x}(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,x(s)) - f(s,\widetilde{x}(s))ds \right|$$

usando la condición Lipschitz...

$$\Rightarrow |x(t) - \widetilde{x}(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, \widetilde{x}(s))| ds \right|$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x(s) - \widetilde{x}(s)| ds \right|$$

Si $M = \text{máx}\left\{|x(s) - \widetilde{x}(s)| : s \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]\right\}$

$\forall t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda], \quad |x(t) - \widetilde{x}(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} M ds \right| = L|t - t_0| M \leq L\lambda M$

Si $\lambda = \frac{1}{2L}$, tenemos

$$\forall t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda] \quad \Rightarrow \quad |x(t) - \widetilde{x}(t)| \leq \frac{M}{2}$$

es absurdo si $M > 0$, luego $M = 0$ y $x(t) = \widetilde{x}(t)$ en $[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$.

El método de la dem (existencia) es por aproximación. Definimos:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &:= x_0, \\
x_2(t) &:= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\ ds \\
x_3(t) &:= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s))\ ds \\
&\vdots \\
x_{k+1}(t) &:= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\ ds
\end{aligned}$$

queremos ver que, para todo $t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$

$$\begin{tikzcd}
x_{k+1}(t) \arrow[r, equal] \arrow[d, "k\to\infty"'] & x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))ds \arrow[d, "k\to\infty"] \\
x(t) & x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds
\end{tikzcd}$$

Ejemplo: $x' = x,\ x(0) = 1 \iff x(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds$

$$x_1 = 1$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t 1ds = 1 + t$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t (1 + s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$x_4(t) = 1 + \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2})ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$x_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \qquad \longrightarrow \qquad x(t) = e^t$$

La demostración se basa en lo siguiente:

- Cada $x_n(t)$ es continua (más aún $x'_{n+1} = f(t, x_n(t))$)
- $\exists\lambda > 0$ tal que $\forall t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$ la sucesión $\{x_n(t)\}$ es de Cauchy, en particular convergente, además
- $x_n(t)$ converge uniformemente a $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$, por lo tanto $x(t)$ es continua en $[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$ y
- $x(t)$ verifica
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Para eso, veamos que existe $\lambda > 0$ tal que la sucesión es *uniformemente* de Cauchy en $[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$.

Esto es: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que para todo $t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$ y $n, m \geq n_0$,

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$$

En realidad veremos que $\exists C > 0$ tal que

$$|x_{k+n}(t) - x_k(t)| \leq \frac{C}{2^k} \quad (\forall n)$$

Empezamos con $x_{k+1}(t) - x_k(t)$:

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\, ds,$$
$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{k-1}(s))\, ds,$$

$$\Rightarrow |x_{k+1}(t) - x_k(t)| = \Big| \int_{t_0}^{t} \Big(f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s)) \Big) ds \Big|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s))| ds \leq L \int_{t_0}^{t} |x_k(s) - x_{k-1}(s)| ds$$

$t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda] \subset I$, recordamos

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq L \int_{t_0}^{t} |x_k(s) - x_{k-1}(s)|\, ds.$$

Si $M_{k+1} = \max\{|x_{k+1}(t) - x_k(t)|\,,\, t \in [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$, entonces

$$\forall t_0 \leq t \leq t_0 + \lambda : \quad |x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq L \int_{t_0}^{t} M_k ds = (t - t_0) L M_k$$

$$\Rightarrow M_{k+1} \leq \lambda L M_k$$

Tomamos $\lambda = \dfrac{1}{2L}$

$$\Rightarrow M_{k+1} \leq \frac{M_k}{2}$$

$$\leq \frac{M_{k-1}}{2^2} \leq \frac{M_{k-2}}{2^3} \leq \cdots \leq \frac{M_2}{2^{k-1}}$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
|x_{k+m}(t) - x_k(t)| &= |x_{k+m}(t) - x_{k+m-1} + x_{k+m-1} - + \cdots - x_k(t)| \\
&= |\sum_{i=0}^{m-1} (x_{k+i+1}(t) - x_{k+i}(t))| \\
&\leq \sum_{i=0}^{m-1} M_{k+i+1} \\
&\leq M_1 \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2^{k+i}} = \frac{M_1}{2^k} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2^i} \\
&\leq \frac{M_1}{2^{k-1}}.
\end{aligned}
$$

que tiende a cero con k, independientemente de m.
En particular,

$$|x_k(t) - x(t)| \leq \frac{C}{2^k}$$

entonces...

$$\Big|\int_{t_0}^{t} f(s,x_k(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds\Big| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,x_k(s)) - f(s,x(s))|ds$$

$$\leq L\int_{t_0}^{t} |x_k(s) - x(s)|ds$$

$$\leq \; L\int_{t_0}^{t} \frac{C}{2^k}ds \;\; \leq \;\; L|t-t_0|\frac{C}{2^k} \;\; \leq \;\; L\lambda\frac{C}{2^k} \;\; \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\begin{tikzcd}
x_{k+1}(t) \arrow[r, equal] \arrow[d, "k\to\infty"'] & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,x_k(s))ds \arrow[d, "k\to\infty"] \\
x(t) & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds
\end{tikzcd}$$

Corolario de $\exists!$

Intervalo maximal de solución

Teorema

I y f como en el Teorema, $t_0 \in I$ y $\xi \in \mathbb{R}$. Sean $t_0 \in J_1 \subset I$, $t_0 \in J_2 \subset I$ y $x_i : J_i \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2$ tales que

$$\begin{aligned} x_i' &= f(t, x_i) \quad \text{en } J_i, \\ x_i(t_0) &= \xi. \end{aligned}$$

Entonces, $x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in J_1 \cap J_2$.