Análisis II - Matemática 3
Análisis Matemático II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 16 - 2do cuatrimestre 2021
Ecuaciones diferenciales ordinarias - Introducción

Introducción a las ecs. dif. ordinarias.

Ecuación algebraica

$$p(x) = 0, \qquad x^2 + 1 = 0,\ x^4 - 1 = 0,$$

incógnita: $x \in \mathbb{R}$, o $x \in \mathbb{C}$, etc.

Ecuación diferencial

$$P(x, f(x), f'(x), ...f^{(n)}(x)) = 0,$$

$$f' = f,\ f' = f^2,\ f'(x) = 2x,\ f''(x) = f(x),$$

incógnita: $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

$$f = e^x,\ \frac{-1}{x},\ x^2,\ e^{\pm x}$$

Ejemplo: $\vec{V}(t,x,y,z)$ un campo de velocidades de un fluido. Si una partícula se mueve en el fluido, su trayectoria

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

verifica

$$\sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = \vec{V}\Big(t, x(t), y(t), z(t)\Big)$$

Es un sistema de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo: $\vec{V}(t,x,y,z) = (-y, x, 0)$, entonces

$$\sigma'(t) = \vec{V}(t, \sigma(t))$$

equivale a

$$x'(t) = -y(t)$$
$$y'(t) = x(t)$$
$$z'(t) = 0$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias.

En general, si $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ y $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$,

$$\begin{cases} x' = V_1(t, x, y, z), \\ y' = V_2(t, x, y, z), \\ z' = V_3(t, x, y, z). \end{cases}$$

Es un sistema de ecuaciones diferenciales de 1er. orden.

Para determinar la posición de una partícula conociendo su velocidad, debemos conocer su posición en algún instante t_0.

Condición inicial:

$$\sigma(t_0) = X_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

donde $t_0 \in \mathbb{R}$ y $X_0 \in \mathbb{R}^3$ son dados.

Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo: damos f y x_0 e intentamos resolver

$$\begin{cases} x'(t) = f(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Tenemos

$$x(t) = \int_0^t f(s)ds + x_0.$$

Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias incluye encontrar primitivas..

Ejemplo:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x'}{x} = 1$$

pero

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{d}{dt}\Big(\log(x(t))\Big)$$

$$\Rightarrow \log(x(t)) = t + c$$

Como $x(0) = 1$,

$$\Rightarrow 0 + c = \log(x(0)) = \log(1) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \log(x(t)) = t \Rightarrow x(t) = e^t$$

Por otro lado, si tenemos

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = a > 0, \end{cases}$$

la misma cuenta nos da $\log a = c$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \log x(t) &= t + \log a \\ x(t) &= e^{t+\log a} = ae^t. \end{aligned}$$

Datos iniciales distintos corresponden a distintas soluciones y además, si son distintas en $t = 0$ son distintas para todo t.
Veremos que es un hecho general de las soluciones de ODE autónomas: dos trayectorias de partículas diferentes no se cortan.

Primer método

Separación de variables

$$\begin{cases} x'(t) = G\big(x(t)\big)F(t), \\ x(0) = a > 0, \end{cases}$$

entonces tenemos

$$\frac{x'(t)}{G\big(x(t)\big)} = F(t)$$

y entonces

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{G(x(s))} ds = \int_0^t F(s) ds$$

Separación de variables

Cambiando variables, $z = x(s)$,

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{G(z)} dz = \int_0^t F(s) ds$$

LLamando H a la primitiva de $1/G$, nos da -en ppio implícitamente- la solución

$$H(x(t)) - H(x_0) = \int_0^t F(s) ds$$

Si podemos despejar:

$$x(t) = H^{-1}\Big(\int_0^t F(s) ds + H(x_0) \Big).$$

Ejemplo:

$$x'(t) = \frac{t}{x^2}, \quad x(0) = 30$$

$$x^2 \cdot x' = t$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = t = \left(\frac{1}{2}t^2\right)'$$

$$\Rightarrow \; \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{2}t^2 + c \; \Rightarrow x(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3c}$$

Condición inicial:

$$30 = x(0) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}0^2 + 3c} = \sqrt[3]{3c} \quad \Rightarrow \quad 30^3 = 3c$$

$$\boxed{\therefore \; x(t) = \sqrt[3]{t^2 + 27000}}$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo: $x'(t) = (x(t))^2$

$G(x) = x^2$, $F(t) = 1$.

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

Operamos simbólicamente

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x^2} = dt \;\Rightarrow\; \int \frac{dx}{x^2} = \int dt$$

$$\Rightarrow\; -\frac{1}{x} = t + c \;\Rightarrow\; x(t) = -\frac{1}{t+c}$$

Si, por ejemplo, $x(0) = 1 \Rightarrow -1 = c$. Por lo tanto la solución es

$$x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Observar $x(t)$ no está definido para todo t.
Los resultados de existencia serán locales .

Ejemplo: $x(t) \geq 0$,

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{x(t)}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

(suponiendo que $x(t) \neq 0$ para $t > 0$ para poder dividir por $\sqrt{x}$) obtenemos

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = dt \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x} = t + c.$$

$$x(0) = 0 \ \Rightarrow \ c = 0 \ \Rightarrow \ x(t) = \frac{1}{4}t^2$$

Pero OJO $x'(t) = \frac{1}{2}t$ es negativo en $t < 0$.. Podemos considerar:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & \text{si } t > 0, \\ \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

verifica $x'(t) = \sqrt(x)$.

Pero también $\widetilde{x}(t) = 0 \ \forall t$ verifica

$$\widetilde{x}' = \sqrt{\widetilde{x}}, \quad \widetilde{x}(0) = 0$$

Veremos que el resultado de existencia *y unicidad* pedirá cierta regularidad a la ecuación, y $\sqrt{x}$ es continua en $x = 0$ pero tiene derivada infinita en el 0.

Ecuaciones diferenciales ordinarias.

También podemos verificar que fijado $\tau > 0$,

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(t-\tau)^2 & \text{si } t > \tau, \\ \\ 0 & \text{si } t \leq \tau. \end{cases}$$

siempre es solución de $x' = \sqrt{x}$ y satisfacen $x(0) = 0$.

Ejemplo de Newton: sistemas de orden 2 vs. de orden 1

Una partícula de masa unitaria sometida a un campo de fuerzas $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.
La ley de Newton dice que su trayecoria $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ verifica

$$\sigma''(t) = \vec{F}(t, \sigma(t)) \qquad \text{para todo } t.$$

Es decir,

$$\begin{cases} x'' = F_1(t, x, y, z), \\ y'' = F_2(t, x, y, z), \\ z'' = F_3(t, x, y, z). \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones diferenciales de orden 2. Pero...

Artimaña: si llamamos $v_1 = x'$, $v_2 = y'$, $v_3 = z'$, tenemos un sistema más grande, pero de orden 1

$$\begin{cases} x' = v_1, \\ v_1' = F_1(t, x, y, z), \\ y' = v_2, \\ v_2' = F_2(t, x, y, z), \\ z' = v_3, \\ v_3' = F_3(t, x, y, z). \end{cases}$$

Desde el punto de vista matemático, los sistemas (quizas grandes) de orden 1, incluyen a los sistemas de orden superior.

Notar que podríamos incluir fuerzas que dependen de la velocidad en este esquema teórico y seguir con sistemas de orden uno.

Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Reordenando las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = v_1, \\ y' = v_2, \\ z' = v_3, \\ v_1' = F_1(t, x, y, z, v_1, v_2, z_3), \\ v_2' = F_2(t, x, y, z, v_1, v_2, z_3), \\ v_3' = F_3(t, x, y, z, v_1, v_2, z_3). \end{cases}$$

Es decir, un sistema de ecuaciones de la forma

$$\varphi' = G(t, \varphi),$$

donde

$$\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t))$$

no es la trayectoria de una partícula en el espacio, sino en el "Espacio de Fases", $\varphi(t) = (\sigma(t), \sigma'(t))$ de todas las posibles posiciones y velocidades.

Una condición inicial en el espacio de fases es

$$\varphi(t_0) = (x_0, y_0, z_0, v_1^0, v_2^0, v_3^0)$$

posición inicial y velocidad inicial.

En general, a una ecuación de orden n:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}),$$

le corresponde un sistema de n ecuaciones con n incógnitas.
Definimos varibles

$$x_0 = x\,,\; x_1 = x'\,,\; x_2 = x''\,,\; x_3 = x'''\,, \ldots, \; x_{n-1} = x^{(n-1)}$$

$$\begin{cases} x_0' = x_1, \\ x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ x_3' = x_4, \\ \vdots \\ x_{n-2}' = x_{n-1}, \\ x_{n-1}' = f(t, x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}). \end{cases}$$

La condición inicial

$$\varphi(t_0) = (x_0(t_0), x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_{n-1}(t_0))$$

corresponde a dar $x(t_0)$, $x'(t_0)$, $x''(t_0)$, $x'''(t_0)$, $\ldots$, $x^{(n-1)}(t_0)$

Ejemplo: $x^{''''}(t) = 0.$ Solución general:

$$x'''(t) = a \;\Rightarrow x''(t) = at + b \Rightarrow x'(t) = a\frac{1}{2}t^2 + bt + c$$

$$\Rightarrow x(t) = a\frac{1}{6}t^3 + b\frac{1}{2}t^2 + ct + d$$

Queda determinda dando
$x(0) = C_0$, $x'(0) = C_1$, $x''(0) = C_2$, $x'''(0) = C_3$

Spoiler alert

Veremos la vez que viene:

Un sistema de la forma

$$(x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t), \ldots, x_n'(t)) = F(t, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

con $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, más condición inicial

$$\big(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0), \ldots, x_n(t_0)\big) = (C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)$$

$(t_0, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) \in \Omega$, bajo ciertas codiciones en F,
el sistema + cond. inicial
admite solución en un entorno de t_0,
y esa solución es única.