# Análisis II - Matemática 3
# Análisis Matemático II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 15 - 2do cuatrimestre 2021
Integración vectorial - repaso

# Repaso Definiciones

**Curva simple regular:**

$$\mathcal{C} = Im(\sigma), \ \sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

$\sigma$ inyectiva, $C^1$, $\sigma'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$

**Superficie regular:**

$$\mathcal{S} = Im(T), \ T : D \to \mathbb{R}^3$$

$D \subset \mathbb{R}^2$ dominio de tipo III, $T$ inyectiva con diferencial de rango máximo (equiv. a $T_u \times T_v \neq 0 \ \forall, v \in D$)

**Integrales sobre curvas (regulares a trozos):**

$\mathcal{C} = Im(\sigma)$, $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$

$\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, $\vec{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathcal{C}} \phi d\ell = \int_a^b \phi(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|dt$$

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_a^b \langle \vec{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt$$

**Integrales sobre superficies (regulares):**

$\mathcal{S} = Im(T)$, $T : D \to \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$

$\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$,

$$\iint_{\mathcal{S}} \phi dA = \iint_{D} \phi(T(u,v)) \|T_u \times T_v\| dudv$$

$\vec{F} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$, $N$ vector normal en $\mathcal{S}$,

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \vec{F}, N \rangle dA = \iint_{\mathcal{S}} \langle \vec{F}, d\vec{A} \rangle = \iint_{D} \langle \vec{F}(T(u,v)), T_u \times T_v \rangle dudv$$

# Teorema de Integración

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \nabla f, d\vec{\ell} \rangle = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

Green: $D$ de tipo III

$$\int_{\partial D^+} Pdx + Qdy = \iint_D (\partial_x Q - \partial_y P) dxdy$$

Teorema de campos conservativos: $\vec{F} = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $C^1$.
Existe $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^2$ tal que $\vec{F} = \nabla \phi$ si y sólo si $\partial_x Q - \partial_y P = 0$

Stokes: $\mathcal{S}$ orientable, parametrizable sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ donde vale Green

$$\int_{\partial S^+} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \iint_{\mathcal{S}} \langle \nabla \times \vec{F}, N \rangle dA$$

$$= \iint_{\mathcal{S}} (\partial_y F_3 - \partial_z F_2) dydz + (\partial_z F_1 - \partial_x F_3) dzdx + (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dxdy$$

Observación: Siempre vale $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$.

# Teorema de campos conservativos:

$\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $C^1$. Son equivalentes

1. La integral de $\vec{F}$ en cualquier curva sólo depende del punto inicial y punto final de la curva.
2. La integral de $\vec{F}$ en cualquier curva cerrada es cero.
3. existe $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de clase $C^2$ tal que $\vec{F}=\nabla\phi$
4. $\nabla\times\vec{F}=0$

Se generaliza con dominio "tal que toda curva cerrada es borde de una superficie contenida en el dominio".

Gauss:

$$\iint_{\partial W} \langle \vec{F}, N \rangle dA = \iint_{\partial W} F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy$$

$$= \iiint_W (\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) dxdydz$$

Siempre vale $div(\nabla \times \vec{F}) = 0$

Ejercicio: $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $C^1$ tal que $div(\vec{F}) = 0$ entonces existe $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $C^2$ tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{A} = \vec{F}$.

Esto se generaliza al caso de dominios donde “toda superficie cerrada dentro del dominio tiene todo el interior contenido en el dominio”