Análisis II - Matemática 3
Análisis Matemático II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 14 - 2do cuatrimestre 2021
Teoremas de integración vectorial - repaso y aplicaciones

Repaso integracón vectorial

Integral en una variable: $\int_a^b f(x)dx$

Versión curvilínea $(n = 2, 3)$:

$\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es C^1 a trozos,
$\mathcal{C} = Im(\sigma)$ la curva orientada correspondiente,
$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{C} \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt$$

Teorema de Integración en un variable

TFC: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase $C^1 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$

Consecuencia en integrales curvilíneas:

$\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es C^1 a trozos,
$\mathcal{C} = Im(\sigma)$
$\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ campo escalar, $\vec{F} = \nabla\phi$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \langle \nabla\phi(\sigma(t)), \sigma'(t)\rangle dt$$

$$= \phi(\sigma(b)) - \phi(\sigma(a))$$

TFC: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de clase $C^1 \Rightarrow \int_a^b f'(t)dt = f(b)-f(a)$

consecuencia en integrales dobles

$$\int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_y(f(x,y))dy\Big)dx = \int_a^b \Big(f(x,\beta(x)) - f(x,\alpha(x))\Big)dx$$

$$\int_c^d \Big(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \partial_x(f(x,y))dx\Big)dy = \int_c^d \Big(f(\beta(y),y) - f(\alpha(y),y)\Big)dy$$

versión curvilínea en $\mathbb{R}^2$:

Teorema de Green:

$\vec{F}(x,y) = (P(x,y),Q(x,y))$ de clase $\mathcal{C}^1$ definido $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. D dominio de tipo III con ∂D una curva regular a trozos, $D\subset\Omega$.

$$\int_{\mathcal{C}^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell}\,\rangle = \int_{\mathcal{C}^+} P dx + Q dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dx\, dy$$

$\mathcal{S}$ superficie regular orientada, parametrizada por $T : D \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ con $\mathcal{S} \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \vec{F}, N \rangle dA = \iint_D \langle \vec{F}(T(u,v)), T_u \times T_v \rangle dudv$$

"versión de Green" en $\mathbb{R}^3$:

Teorema de Stokes

D un dominio donde vale Green, $\vec{F}$ C^1, entonces

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \nabla \times \vec{F}, N \rangle dA = \int_{\partial \mathcal{S}} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$$

TFC: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase $C^1 \Rightarrow \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$

Versión integral triple / doble:

$$\iint_D \Big(\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} \partial_x f \, dx \Big) \, dydz = \iint_D \Big(f(y,z,\beta(y,z)) - f(y,z,\alpha(y,z)) \Big) dydz$$

Versión geométrica:

Teorema de la divergencia, o de Gauss

$W \subset \mathbb{R}^3$ de tipo IV, entonces para todo $\vec{F}$ campo C^1 definido en un abierto que contiene a W vale

$$\boxed{\iiint_W div(\vec{F}) \; dVol = \iint_{\partial W} \langle F, N \rangle \; dA}$$

donde N = normal exterior.

Aplicación: Ecuación de continuidad

$\vec{J}$ campo vectorial que describe flujo de cargas (corriente) y ρ la densidad de carga.
La variación en el tiempo de la carga total de una región W es

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_W \rho\ dVol = -\iint_{\partial W}\langle \vec{J}, N\rangle dA$$

Pero Gauss dice $\iint_{\partial W}\langle \vec{J}, N\rangle dA = \iiint_W div(\vec{J})\ dVol$.
Asumiendo regularidad suficiente como para que

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_W \rho\ dVol = \iiint_W \frac{\partial}{\partial t}\rho\ dVol$$

tenemos

$$\iiint_W \left(\partial_t \rho + div(\vec{J})\right) dVol = 0,\ \ \forall W$$

$$\therefore \boxed{\partial_t \rho = -div(\vec{J})}$$

La ecuación del calor

$$Temp = T(x, y, z, t)$$

$$\vec{J} = -k\nabla T = -k(\partial_x T, \partial_y T, \partial_z T)$$

$$div\vec{J} = -div(k\nabla T) =? = -k\ div\nabla(T) = -k(\partial_x^2 T + \partial_y^2 T + \partial_z^2 T)$$

La ecuación de continuidad "$\partial_t \rho = -div(\vec{J})$" se transforma en

$$\partial_t T = k\nabla^2 T$$

Fórmulas de integración por partes

$f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \langle f\nabla g, d\vec{\ell}\rangle = f(q)g(q) - f(p)g(p) - \int_{\mathcal{C}} \langle g\nabla f, d\vec{\ell}\rangle$$

$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$div(\phi\vec{F}) = \phi\ div(\vec{F}) + \langle \nabla\phi, \vec{F}\rangle$$

$$\Rightarrow \iiint_W \phi\ div(\vec{F})\ dVol = \iint_{\partial W} \phi\langle \vec{F}, N\rangle dA - \iiint_W \langle \nabla\phi, \vec{F}\rangle\ dVol$$

$$\nabla \times (\phi\vec{F}) = \cdots ?$$

Fórmulas de integración por partes

$$\nabla \times (\phi \vec{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \phi F_1 & \phi F_2 & \phi F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \phi \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x \phi & \partial_y \phi & \partial_z \phi \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \phi \nabla \times \vec{F} + (\nabla \phi) \times \vec{F}$$

$$\therefore \iint_S \langle \phi \nabla \times \vec{F}, N \rangle dA = \int_{\partial S} \phi \langle \vec{F}, d\ell \rangle - \iint_S \langle (\nabla \phi) \times \vec{F}, N \rangle dA$$

Ejercicio: Verificar la identidad

$$div(\vec{F} \times \vec{G}) = \langle \nabla \times \vec{F}, \vec{G} \rangle - \langle \vec{F}, \nabla \times \vec{G} \rangle$$

y producir una fórmula de integración por partes.