Análisis II - Matemática 3
Análisis Matemático II

Marco Farinati

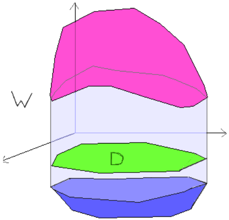
FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 13 - 2do cuatrimestre 2021
La divergencia y el teorema de Gauss

El teorema fundamental e integrales triples

Supongamos $W \subset \mathbb{R}^3$ un dominio del tipo

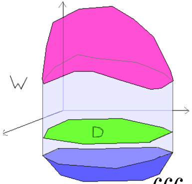
$$W = \Big\{(x,y,z) : (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\Big\}$$



Si $\phi : W \to \mathbb{R}$

$$\iiint_W \phi \, dxdydz = \iint_D \Big(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \phi(x,y,z)\, dz \Big)\, dxdy$$

¿Caso fácil? supongamos que $\phi(x,y,z) = \partial_z(f)$, entonces...



$$W = \Big\{(x,y,z) : (x,y) \in D, \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\Big\}$$

$$\phi = \partial_z(f) : W \to \mathbb{R}$$

$$\iiint_W \partial_z(f)\ dxdydz = \iint_D \Big(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \partial_z(f)\ dz \Big)\ dxdy$$

$$= \iint_D f(x,y,z)\Big|_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)}\ dxdy$$

$$= \iint_D \Big(f(x,y,\beta(x,y)) - f(x,y,\alpha(x,y))\Big)\ dxdy$$

Interpretación en términos de integral de superficie?

Lema:

$W \subset \mathbb{R}^3$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $W \subset \Omega$, $f \in C^1$ como antes, pero asumimos
D con borde C^1 a trozos,
$\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ C^1,
Definimos

$$\vec{F}(x,y,z) := (0,0,f(x,y,z))$$

Entonces

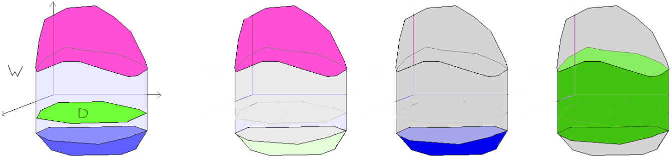
$$\iint_D \Big(f(x,y,\beta(x,y)) - f(x,y,\alpha(x,y)) \Big)\, dxdy$$

coincide con

$$\iint_{\partial W} \langle \vec{F}, N \rangle dA$$

donde N es la normal exterior.

dem:



$$\iint_{\partial W} \quad = \quad \iint_{S_1} \quad + \quad \iint_{S_2} \quad + \quad \iint_{S_3}$$

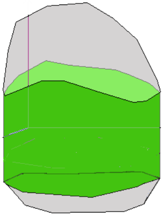
$$\iint_{S_1} \langle F, N\rangle dA = \iint_D \langle F(x,y,\beta(x,y)), T_x \times T_y\rangle dxdy$$

$$= \iint_D \langle (0,0,f(x,y,\beta(x,y)), (-\partial_x\beta, -\partial_y\beta, 1)\rangle dxdy$$

$$= \iint_D f(x,y,\beta(x,y))dxdy$$

Análog. (N hacia abajo) $\displaystyle\iint_{S_2} \langle F, N\rangle dA = -\iint_D f(x,y,\alpha(x,y))dxdy$

para $\iint_{S_3}$:



$$\sigma : [a, b] \to \partial D, \qquad \sigma(t) = (x(t), y(t))$$

$$T : R \to S_3, \qquad T(t, z) := \big(x(t), y(t), z\big)$$

$$R := \Big\{(t, z) : t \in [a, b], \alpha(x(t), y(t)) \leq z \leq \beta(x(t), y(t))\Big\}$$

$$\iint_{S_3} \langle F, N\rangle dA = \int_a^b \int_{\alpha(x(t),y(t))}^{\beta(x(t),y(t))} \langle (0, 0, f(x(t), y(t), z)), T_t \times T_z\rangle dz\, dt$$

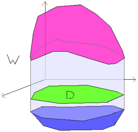
$$\boxed{T_t \times T_z \perp T_z = (0, 0, 1)}$$

$$\Rightarrow (0, 0, f(x, y,)) \perp T_t \times T_z$$

$$\Rightarrow \iint_{S_3} \langle F, N\rangle dA = \int_a^b \int_{\alpha(x(t),y(t))}^{\beta(x(t),y(t))} 0 \; dz \; dt = 0$$

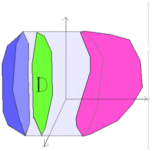
Tipos de regiones y fórmulas para Gauss

Región de tipo I en $\mathbb{R}^3$:



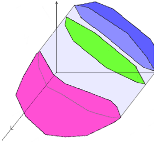
$$\left\{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\right\}$$

Región de tipo II en $\mathbb{R}^3$:



$$\left\{(x,y,z) : (x,z) \in D,\ \alpha(x,z) \leq y \leq \beta(x,z)\right\}$$

Región de tipo III en $\mathbb{R}^3$:



$$\left\{(x,y,z) : (y,z) \in D,\ \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\right\}$$

Tipo IV: todos los tipos en simultáneo (se asume $\alpha, \beta \in C^1$)

Definición

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto, $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1. La divergencia de $\vec{F}$ es el campo escalar

$$div(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} := \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3$$

Teorema de la divergencia, o de Gauss

$W \subset \mathbb{R}^3$ de tipo IV, entonces para todo $\vec{F}$ campo C^1 definido en un abierto que contiene a W vale

$$\boxed{\iiint_W div(\vec{F})\ dVol = \iint_{\partial W} \langle F, N \rangle\ dA}$$

donde N = normal exterior.

Lema

- W dominio de tipo I, entonces

$$\iiint_W \partial_z(f)dz\ dxdy = \iint_{\partial W} \langle (0,0,f), N\rangle dA$$

- W dominio de tipo II, entonces

$$\iiint_W \partial_y(f)dy\ dxdz = \iint_{\partial W} \langle (0,f,0), N\rangle dA$$

- W dominio de tipo III

$$\iiint_W \partial_x(f)dx\ dydz = \iint_{\partial W} \langle (f,0,0), N\rangle dA$$

Como corolario:

Teorema de la divergencia de Gauss

W dominio de tipo IV, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$,

$$div(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \partial_x(F_1) + \partial_y(F_2) + \partial_z(F_3)$$

Entonces

$$\iiint_W div(F)\ dVol = \iint_{\partial W} \langle \vec{F}, N \rangle dA$$

donde N es la normal exterior.

Ejemplo: S_R=esfera de radio R, $\vec{F} = (xy + y^2, 11z + y, z^2)$. El flujo hacia afuera de $\vec{F}$ en S es

$$Flujo = \iint_{S_R} \langle \vec{F}, N \rangle dA$$

$$T(\theta, \phi) = (R \operatorname{sen} \theta \cos \phi, R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, R \cos \theta), \quad \theta \in [0, \pi], \ \phi \in [0, 2\pi]$$

entonces

$$Flujo = \int_0^{\pi} \Big(\int_0^{2\pi} \vec{F}(T(\theta, \phi)), T_\theta \times T_\phi \rangle \ d\phi \Big) d\theta = \cdots$$

Usando Gauss:

$$\iint_S \langle \vec{F}, N \rangle dA = \iiint_{B_R} div(\vec{F}) \ dVol = \iiint_{B_R} (y + 1 + 2z) \ dVol$$

$$= \iiint_{B_R} 1 \ dVol + \iiint_{B_R} y \ dVol + \iiint_{B_R} 2z \ dVol$$

$$= \quad 1 \frac{4}{3} \pi R^3 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0$$

Ejemplo: Si $\vec{F}$ es un campo vectorial lineal

$$\vec{F}(x,y,z) =$$

$$\left(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \ , \ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \ , \ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z\right)$$

$$\Rightarrow div(\vec{F}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad es\ cte!$$

Si W es de tipo IV, el flujo (hacia afuera) de $\vec{F}$ en el borde de W es

$$\Rightarrow Flujo = \iint_{\partial W} \langle \vec{F}, N \rangle dA$$

$$= \iiint_W (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \ dxdydz$$

$$= (a_{11} + a_{22} + a_{33}) Vol(W)$$