Análisis II - Matemática 3
Análisis Matemático II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 12 - 2do cuatrimestre 2021
El teorema de Stokes y campos conservativos

El rotor y test de derivadas cruzadas

Recuerdo:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \Big(\partial_y F_3 - \partial_z F_2 \ , \ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \ , \ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \Big)$$

Observamos: $\vec{F} = \nabla\phi = (\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi)$ para alguna $\phi \in C^2$ entonces $rot(\vec{F}) = 0$.

Es decir, $\vec{F} = \nabla\phi \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$.

La pregunta es: $\nabla \times \vec{F} = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \exists\phi$ funcion escalar tal que $\vec{F} = \nabla\phi$?

Aplicación en curvas y cálculo de trabajo:

$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto,

Si $\vec{F} = \nabla\phi$ con $\phi \in C^1$,

entonces para cualquier $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ continua y C^1 a trozos, $Im(\sigma) \subset \Omega$, vale

$$\int_\sigma \langle \vec{F}, d\ell \rangle = \phi(\sigma(b)) - \phi(\sigma(a))$$

Teorema (caracterizacón por curvas)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto conexo. $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo continuo.
Son equivalentes

1. Para todo par de curvas $\sigma : [a, b] \to \Omega$, $\tau : [\widetilde{a}, \widetilde{b}] \to \Omega$ continuas y C^1 a trozos, el trabajo sólo depende del punto inicial final. Es decir
$$\sigma(a) = \tau(\widetilde{a}),\ \sigma(b) = \tau(\widetilde{b}) \Rightarrow \int_\sigma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_\tau \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$
2. Para toda curva **cerrada** $\mathcal{C}$, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$
3. $\exists \phi : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar C^1 tal que $\vec{F} = \nabla \phi$.

dem: ...

demostración:

Fijamos $p_0 \in \Omega$, definimos "$V(x,y,z) := \int_{p_0}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$."

donde $\int_{p_0}^{(x,y,z)} = \int_{\mathcal{C}}$ donde $\mathcal{C}$ es alguna (cualquiera!) curva que empieza en p_0 y termina en (x,y,z)

$$g(t) := V(x+t,y,z) \Rightarrow g'(0) = \partial_x(V)$$

Para t muy chico,

$$V(x+t,y,z) = \int_{p_0}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \int_0^t F_1(x+s,y,z)ds$$

$$\Rightarrow g'(t) = F_1(x+t,y,z), \quad g'(0) = F_1(x,y,z),$$

Teorema: (caracterización por rotor)

$\vec{F}:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial C^1. Si $\Omega=\mathbb{R}^3$, entonces son equivalentes

- $\exists\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que $\vec{F}=\nabla\phi$.
- $\nabla\times F=0$.

$$\phi_1(x,y,z):=\int_0^y F_2(0,t,0)dt+\int_0^z F_3(0,y,t)dt+\int_0^x F_1(t,y,z)dt$$

$$\phi_2(x,y,z):=\int_0^x F_1(t,0,0)dt+\int_0^z F_3(x,0,t)dt+\int_0^y F_2(x,t,z)dt$$

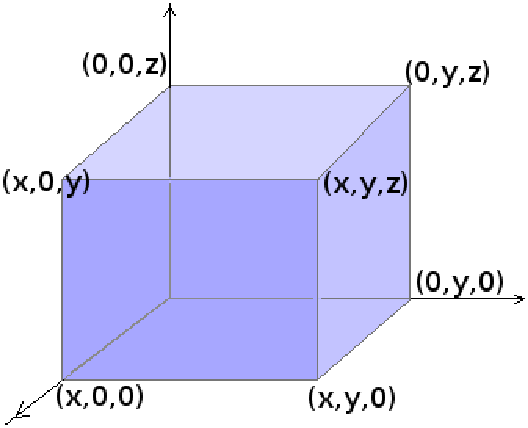
$$\phi_3(x,y,z):=\int_0^x F_1(t,0,0)dt+\int_0^y F_2(x,t,0)dt+\int_0^z F_3(x,y,t)dt$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial_x}=F_1,\ \frac{\partial\phi_2}{\partial_y}=F_2,\ \frac{\partial\phi_3}{\partial_z}=F_3$$

Veamos

$$\nabla\times F=0\Rightarrow\phi_1=\phi_2=\phi_3$$

Veamos $\nabla \times F = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 = \phi_3$



El teorema es válido para cualquier abierto? no...

Ejemplo:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \ , \ \frac{x}{x^2+y^2} \ , \ 0 \right) = (P,Q,0)$$

Está definido en $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$

$$\nabla \vec{F} = (0 \ , \ 0 \ , \partial_x Q - \partial_y P) = (0,0,0)$$

Sin embargo, para $\sigma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 0)$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$\int_\sigma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi \neq 0$$

Cuál es el problema?

Posibles regiones donde vale el teorema de campos conservativos:

1) simple conexión $\leftrightarrow \pi_1(\Omega) = 0$, (o mejor... $H^1(\Omega) = 0$)

Ejemplos:

$\mathbb{R}^3$ - finitos puntos ✓ ,

$\mathbb{R}^3$ - bola ✓

$\mathbb{R}^3$ - un recta **X**

$\mathbb{R}^3$- semirecta ✓

$\mathbb{R}^3$ - círculo **X**

$\mathbb{R}^3$- plano o semiplano..., Ω= una bola, una bola - un punto,...