Análisis II - Matemática 3
Análisis Matemático II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 10 - 2do cuatrimestre 2021
El teorema de Green: aplicaciones

Teorema de Green

Recuerdo:
D **de tipo III**, $F = (P, Q)$ un campo C^1 definido en un abierto que contienen a D, ∂D es curva regular a trozos, entonces

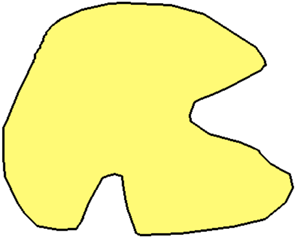
$$\boxed{\int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy}$$

Pregunta: Vale el teorema de Green en dominios más generales? es decir, que sean de tipo I pero no necesariamente de tipo II, o viceversa? o que no sean ni tipo I ni tipo II?

Veremos como argumentar para generalizar:

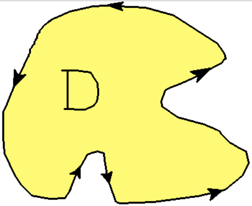
Principio:

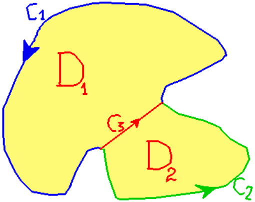
Si D es un dominio que se consigue "pegando por un pedazo de borde" dos dominios donde vale el teorema de Green, entonces vale el teorem de Green en D

Ejemplo: 

No es ni de tipo I ni de tipo II (menos aún de tipo III)

Sin embargo, el teorema de Green es válido en este dominio, pues...





$$\iint_D \phi(x,y)dxdy = \iint_{D_1} \phi(x,y)dxdy + \iint_{D_2} \phi(x,y)dxdy$$

$$\partial D^+ = C_1 \cup C_2, \qquad \partial D_1^+ = C_1 \cup C_3, \qquad \partial D_2^+ = C_2 \cup \boxed{C_3^{op}}$$

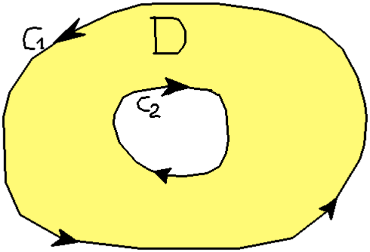
$$\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -\int_{C_3^{op}} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \quad \Rightarrow \int_{\partial D^+} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

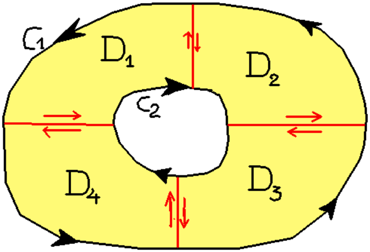
$$= \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} + \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} + \int_{C_3^{op}} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

$$= \int_{\partial D_1^+} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} + \int_{\partial D_2^+} \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

Anillo

El teorema de Green vale en un “anillo”:





Atención la orientación de la curva “exterior” es antihoraria, la orientación de la “interior” es horaria
Green dice

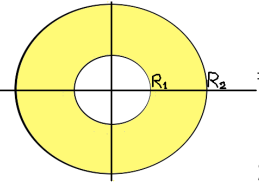
$$\int_{\mathcal{C}_1^+} Pdx + Qdy - \int_{\mathcal{C}_2^+} Pdx + Qdy = \iint_D (-\partial_y P + \partial_x Q)dxdy$$

Ejemplo

$$F(x,y)=(P,Q)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right),\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$$

$$\partial_y P=\partial_y\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-1}{x^2+y^2}+y\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_x Q=\partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{x^2+y^2}-x\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$$



$$\Rightarrow -\partial_y P+\partial_x Q=\frac{2}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}=0!$$

Si orientamos las dos circunferencias igual, la integral de F no depende del radio: $\int_{S^+_{R_1}}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}=\int_{S^+_{R_2}}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}$

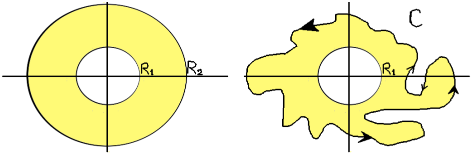
Esto lo podríamos hacer de manera directa:

$$F(x,y)=(P,Q)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right),\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$$

$$c_i := (R_i\cos(t), R_i\,\mathrm{sen}(t)),\quad t\in[0,2\pi],\qquad i=1,2$$

$$F(c_i(t))=\left(\frac{-R_i\,\mathrm{sen}(t)}{R_i^2},\frac{R_i\cos(t)}{R_i^2}\right),\ \ c_i'(t)=\left(-R_i\,\mathrm{sen}(t),R_i\cos(t)\right)$$

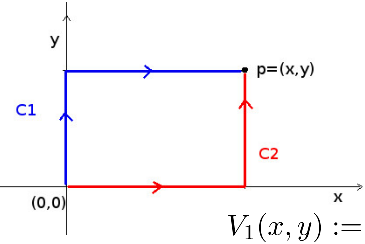
$$\int_0^{2\pi}\langle F(c_i(t)),c_i'(t)\rangle dt=\int_0^{2\pi}\frac{R_i^2(\mathrm{sen}^2(t)+\cos^2(t))}{R_i^2}dt=\int_0^{2\pi}1dt=2\pi$$



pero también

$$\int_{\mathcal{C}}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}=2\pi$$

$F = (P, Q)$ definido en $\mathbb{R}^2$. Definimos, para cada $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:



$$V_1(x,y) := \int_{\mathcal{C}_1(p)} P dx + Q dy = \int_0^y Q(0,t)dt + \int_0^x P(t,y)dt$$

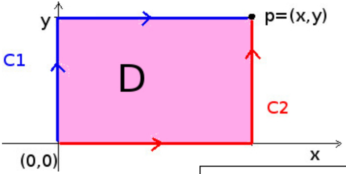
$$V_2(x,y) := \int_{\mathcal{C}_2(p)} P dx + Q dy = \int_0^x P(t,0)dt + \int_0^y Q(x,t)dt$$

Tenemos

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial V_2}{\partial y} = Q(x,y)$$

Usando Green...

$F = (P,Q)$ definido en $\mathbb{R}^2$, $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$:



$$V_1(x,y) = \int_{\mathcal{C}_1(p)} P dx + Q dy,$$

$$V_2(x,y) = \int_{\mathcal{C}_2(p)} P dx + Q dy$$

$$\boxed{\partial_x V_1 = P(x,y), \;\; \partial_y V_2 = Q(x,y)}$$

Lema: $\vec{F} = (P,Q)$ **definido en** $\mathbb{R}^2$

$\partial_y P = \partial_x Q \Rightarrow V_1(x,y) = V_2(x,y)$ pra todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

como consecuencia:

Teorema

$\vec{F} = (P,Q)$ de clase C^1 definido en $\mathbb{R}^2$. Entonces $\exists V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla V$ si y sólo si $\partial_y P = \partial_x Q$.