Análisis II - Matemática 3 Análisis Matematico II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 1 - 2do cuatrimestre 2021

La materia

1. Notas + clases teóricas (Lu y Mie 9-11, quedan grabadas) + videos complementarios + videos prácticos + clases reducidas.
2. Zoom + Campus virtual + email
   Por favor, verifiquen que estén inscriptos en **SIU Guarani + Campus + Un turno practico**.
3. Dos partes.
   - Integracion en curvas y superficies en $\mathbb{R}^N$.
   - Ecuaciones diferenciales.
4. Dos parciales + encuesta obligatoria. Dos recuperatorios (uno para cada parcial).

Curvas

Curva "geométrica", parametrizable, y parametrizada:

Primera definición:
Una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de puntos en el plano (si $n = 2$) o en el espacio (si $n = 3$) que puede describirse mediante un parámetro que varía en forma continua en un intervalo cerrado y acotado de la recta.

Definición $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ es una curva si existe una función continua $\sigma(t)$, denominada una "parametrización de $\mathcal{C}$", definida en algún intervalo $[a, b]$

$$\sigma : [a, b] \to \mathcal{C},$$

tales que $P \in \mathcal{C}$ si y solo si existe $t \in [a, b]$ con $\sigma(t) = P$.

σ se llama una parametrización de $\mathcal{C}$

Curvas

Toda vez que usemos el término parametrización para una función $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$, se asumirá que es continua y *suryectiva* (es decir que la imagen de σ es $\mathcal{C}$).

La continuidad de σ en la definición anterior implica la continuidad de todas sus coordenadas (de hecho es equivalente). Por ejemplo, si $n = 3$ y

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

entonces las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ definidas en $[a, b]$ resultan continuas.

Curvas

Con la definición anterior, una curva resulta ser siempre acotada. Es decir que está contenida en un una bola de radio suficientemente grande.

Esto se demuestra fácilmente notando que todas las coordenas estan acotadas por ser funciones continuas definidas sobre un intervalo compacto.

Curvas

Ejemplo:

$$\sigma(t) = (\cos(3t), \operatorname{sen}(3t), t),$$

con $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$.

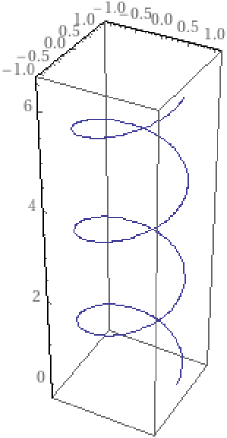

Figura: $\mathcal{C}$=Im(σ)

Curvas

Notemos que la misma $\mathcal{C}$ puede parametrizarse de otras formas.
Por ejemplo

$$\tilde{\sigma}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t/3),$$

con $\tilde{\sigma}$ definida en $[0, 6\pi]$, o

$$\hat{\sigma}(t) = (\cos(3t^2), \operatorname{sen}(3t^2), t^2),$$

con $\hat{\sigma}$ definida en $[0, \sqrt{2\pi}]$.

Curvas

El ejemplo más simple de curva plana es el gráfico de una función continua. En efecto, si tenemos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, su gráfico

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f(x), \quad x \in [a, b]\Big\},$$

es una curva que admite una parametrización

$$\sigma(x) = (x, f(x))$$

definida para $x \in [a, b]$.

Curvas

Definición Una curva $\mathcal{C}$ se dice "simple, abierta" si no se corta a si misma. Más precisamente, si admite una parametrización $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ que es inyectiva en $[a, b]$.

Definición Una curva $\mathcal{C}$ se dice "simple, cerrada" si admite una parametrización $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ que es inyectiva en $[a, b)$ y con $\sigma(a) = \sigma(b)$.

Curvas

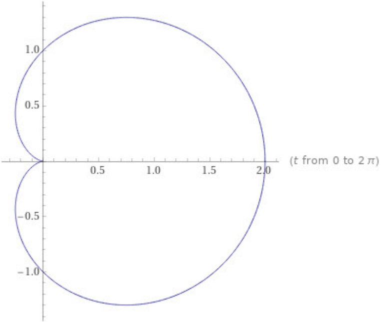

Figura: Curvas cerrada simple: Cardiodie

$$\sigma(t) = (1 + \cos(t))\big(\cos(t), \operatorname{sen}(t)\big),\ t \in [0, 2\pi]$$