Análisis I - Práctica 6

1. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$

   (b) $f(x,y,z) = ye^x + z$

   (c) $f(x,y) = x^2\sin^2(y)$

   (d) $f(x,y) = \sin x$

   (e) $f(x,y,z) = z(cos(xy) + ln(x^2+y^2+1))$

   (f) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$

   (g) $f(x,y) = \int_x^y e^{\sin t}dt$

   (h) $f(x,y) = \int_x^{x^2+y^2} e^t dt$

   (i) $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$

2. Calcule

   (a) $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$ para $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$

   (b) $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)$ para $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2} + \ln(y)$

   (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$, para $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. Dadas las funciones

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = |x| + |y|$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Demuestre que en el origen

   (a) f_1 es discontinua aunque existen las derivadas parciales.

   (b) f_2 no admite derivadas parciales pero es continua.

   (c) f_3 es diferenciable pero sus derivadas parciales son discontinuas.

4. Estudie la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:

(a) $f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\left(4\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$

5. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Muestre que f no es diferenciable en $(0,0)$. Sin embargo, para cualquier curva diferenciable $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que pase por el origen una sola vez, se cumple que $f(\Phi(t))$ es derivable para todo t.

6. Describir la figura geométrica formada por los puntos de coordenadas $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{cases} x = 0 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ 2y \leq z \leq 2z + 2y \end{cases}$$

Justifique las respuesta.

7. Encuentre la ecuación del plano que pasa por $(2,1,0), (3,2,-1), (2,-1,1)$.

8. (a) Encuentre dos vectores no paralelos ortogonales a $(-1,1,2)$.

   (b) Escriba la ecuación del plano que pasa por el punto $(0,1,2)$ y es ortogonal al vector $(1,1,1)$.

9. (a) Escriba la ecuación del plano que pasa por el punto (a,b,c) y es ortogonal al vector (v_1, v_2, v_3).

   (b) Encuentre la ecuación de la recta normal al plano de ecuación $6x - 2y + 4z = 0$ que pasa por el punto $(3,1,1)$.

10. (a) Encuentre un vector unitario perpendicular a los dos vectores $(1,1,1)$ y $(3,1,0)$.

    (b) Encuentre un vector normal al plano que pasa por los puntos $(1,0,1)$, $(3,4,0)$ y $(1,-1,3)$.

11. Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ las transformaciones lineales dadas por

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= (2x_1, x_1 + x_2, 7x_1 - x_2) \\ G(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_3, x_1 - 4x_2, 2x_1 - x_2 + x_3, 5x_2) \end{aligned}$$

   (a) Calcule las matrices asociadas a F y a G.

   (b) Calcule $G \circ F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ y su matriz asociada, ¿qué relación hay entre ésta y las halladas en a)? Justifique la respuesta.

12. Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = 2x - 3y$

   (a) Calcule la ecuación del plano $Graf(T)$.

   (b) Encuentre un sistema de generadores de dicho plano.

13. (a) Encuentre una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico sea el plano

$$\pi = \{(x, y, z) \in: \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

   (b) De la matriz en la base canónica asociada a la f hallada en a).

14. Si se corta la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano de ecuación $y = 0$ se obtiene una circunferencia. De la parametrización de la recta tangente a dicha circunferencia en el punto $(1, 0, 0)$ y en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

15. Estudie la diferenciabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados y escriba la ecuación del plano tangente cuando éste exista.

   (a) $f(x, y) = xy + 1 - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$ en $(1, 5)$ y en $(2, 2)$.

   (b) $f(x, y) = x^{1/4} y^{1/4}$ en $(0, 0)$ y en $(16, 1)$.

   (c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ en (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$.

   (d) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en $(0, 0)$ y en $(1, 0)$.

   (e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en $(0, 0)$ y en $(-1, 1)$.

16. Calcule $DF(x)$ para las siguientes funciones:

   (a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, y)$

   (b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$

   (c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$

(d) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x) = ||x||^2$

17. Calcule el gradiente de f para

    (a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z^2$

    (b) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$

    (c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

18. Calcule los ángulos formados por el gradiente de la función $f(x, y) = x^{\sqrt{3}} + y$ en el punto $(1, 1)$ y los ejes de coordenadas.

19. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y (x_0, y_0, z_0) un vector. Muestre que el núcleo de la transformación lineal $Df(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal a $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.

20. Sean $f(u, v, w) = u^2 + v^3 + wu$ y $g(x, y) = x \sin y$. Dadas

$$u(t) = t^2 + 1, v(t) = \sin t, w(t) = t - 1 \text{ y } x(t) = \sin t, y(t) = t$$

caclule

$$\frac{d}{dt} f\left(u(t), v(t), w(t)\right) \text{ y } \frac{d}{dt} g\left(x(t), y(t)\right)$$

    (a) usando la regla de la cadena

    (b) sustituyendo

21. Sean $f(u, v) = e^{uv} \sin(u^2 + v^2), g(u, v, w) = \ln(u^2 + v^2 + w^2 + 1)$. Dadas

$$u(x, y) = x + y, v(x, y) = xy, w(x, y) = x - y + 1$$

calcule las derivadas parciales de las funciones

$$f\left(u(x, y), v(x, y)\right) \text{ y } g\left(u(x, y), v(x, y), w(x, y)\right)$$

    (a) usando la regla de la cadena

    (b) sustituyendo

22. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

    (a) $f(x, y) = \int_0^{2y} x^2 z + z^3 dz$

    (b) $f(x, y) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin(xyz) dz$

    (c) $f(x, y, z) = \int_5^{x+2y} \sin(x^2 + yz + t) dt$

23. a) ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}_{>0}$ es

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^p \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

diferenciable en $\mathbb{R}^2$?¿Para qué valores de p es f de clase C^1?

b) La función f se puede escribir como $g(x^2+y^2)$ con $g(t) = t^p \text{sen}\, \frac{1}{t}$ si $t > 0$ y $g(0) = 0$. ¿Qué conclusiones se obtienen si se estudia la diferencibilidad de g?

24. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

(a) $F(x,y) = G\left(f(x)g(y), f(x)h(y)\right)$

(b) $F(x,y) = G(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$

(c) $F(x,y) = G(x, G(x,y))$

(d) $F(x,y) = f(x)^{g(y)} \quad$ (si $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$)

(e) $F(x,y) = G\left(\int_x^{f(y)} h(t)dt, g(y)\right)$

25. Usando la expresión

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$$

para una función f adecuada, aproxime $\left(0,99e^{0,2}\right)^8$.

26. Calcule la derivada direccional de f en x_0 en la dirección v siendo:

(a) $f(x,y) = \sin x \cos y \qquad x_0 = (1,1) \qquad v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(b) $f(x,y) = x^4 + \ln(xy) \qquad x_0 = (e,1) \qquad v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

(c) $f(x,y,z) = e^z(xy + z^2) \qquad x_0 = (0,1,0) \qquad v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(d) $f(x,y,z) = y + yz + zxy \qquad x_0 = (1,1,1) \qquad v = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad x_0 = (1,1,1) \qquad v = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(f) $f(x,y,z) = x^{yz} \qquad x_0 = (e,e,0) \qquad v = \left(\frac{12}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}\right)$

Si f es diferenciable en x_0 verificar que la derivada calculada coincide con $\nabla f(x_0) \cdot v$.

27. Dada la superficie $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$. Muestre que el vector $v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es normal a la superficie S en el punto $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e interprete este hecho geométricamente.

28. Sea $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$

    (a) Usando la definición de derivada direccional, muestre que

    $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

    y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

    (b) Muestre que f es continua en $(0,0)$.

    (c) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

29. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que la función definida por $h(x) = f(x)g(x)$ es diferenciable en x_0 y

    $$\nabla h(x_0) = f(x_0)\nabla g(x_0) + g(x_0)\nabla f(x_0)$$

    ¿Qué relación existe entre las derivadas direccionales de h en x_0 en la dirección $v(||v|| = 1)$ y las derivadas direccionales de f y g en x_0 en la misma dirección?

30. Calcule las derivadas direccionales de f en el origen en cualquier dirección $v, ||v|| = 1$, siendo

    $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

31. Calcule ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados

    (a) $x^{10}y - \cos(z)x + 7 = 0 \qquad x_0 = (7,0,0)$

    (b) $xy - z\ln(y) + e^{xy} = 1 \qquad x_0 = (0,1,1)$

    (c) $xy\sin(y) + ze^{xy} - z^2 = 0 \qquad x_0 = (4,0,1)$

    (d) $\cos(x)\cos(y)e^z = 0 \qquad x_0 = (\pi/2, 1, 0)$

32. Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0) y $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y,z) = f(x,y) - z$, vea qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de f en (x_0, y_0) y el plano tangente a una superficie de nivel de h en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

33. Encuentre la dirección en que la función $z = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(1,1)$.¿Cuál es la magnitud $||\nabla z||$ en esta dirección? Interprete geométricamente esta magnitud.

34. Si $h(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ denota la altura de una montaña en la posición (x,y).¿En qué dirección desde $(1,0)$ debería uno comenzar a caminar para escalar más rápido?

35. (a) Muestre que si $\nabla f(x_0) \neq 0$ entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f decrece más rápidamente.

    (b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función $f(x,y) = 10+6\cos(x)\cos(y)+4\cos(3y)$. En el punto $(\pi/3, \pi/3)$ encuentre las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.

36. El capitán Ralph se encontró en el lado soleado de Mercurio y notó que su traje espacial se fundía. La temperatura en su sistema rectangular de coordenada en su vecindad viene dada por

$$T(x,y,z) = e^{-x} + e^{-zy} + e^{-3z}$$

Si él está ubicado en $(1,1,1)$. ¿En qué dirección deberá comenzar a moverse con el fin de enfriarse lo más rápido posible?

37. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Pruebe que $|DF(x,y)| \neq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ pero que F no es inyectiva.

38. Determine si las siguientes aplicaciones son localmente inversibles de clase C^1 en el punto dado

    (a) $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ en $(x,y) \neq (0,0)$

    (b) $F(x,y) = (\sin x, \cos(xy))$ en $(\pi, \pi/2)$

39. Sea $f(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + z^2$. Demuestre que $f(x,y,z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y,z)$ en el punto $(1,1,1)$. Encuentre $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1)$.

40. Encuentre la solución $y = f(x,z)$ de $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ en un entorno de los siguientes puntos del plano xz y escribir explícitamente esos entornos

    (a) $(5,10)$

    (b) $(0,64)$

41. Determine las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones

    (a) $f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1 \quad P = (2,0)$

    (b) $g(x,y) = x^5 + y^y + xy = 3 \quad P = (1,1)$

    (c) $h(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0 \quad P = (0,0,2)$

42. Encuentre los planos tangentes a la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\}$ que sean paralelos al plano $\Pi : x + 4y + 6z = 8$.

43. (a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2)$$

   i. Verifique que f es una transformación lineal y calcule su matriz asociada.
   ii. Calcule la matriz de la diferencial $Df(x)$.
   iii. ¿Qué relación hay entre estas dos matrices?

   (b) Muestre que lo ocurrido en el item anterior vale para cualquier transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

44. Definimos $F : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}$ como

$$F(x_1, x_2, ..., x_9) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

   (a) Pruebe que si $F(a) \neq 0$, entonces hay un entorno de a tal que si x está en ese entorno, $F(x) \neq 0$.

   (b) Concluya que si la matiz $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$ es inversible para un $a = (a_1, a_2, ..., a_9) \in \mathbb{R}^9$, entonces para x en un entorno de a será inversible la matriz $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$.

45. *Teorema del Valor Medio para 2 variables*

   (a) Dados P_1 y P_2 puntos en $\mathbb{R}^2$, dibuje abiertos distintos que contengan al segmento P_1P_2.

   (b) De alguna función definida en alguno de estos abiertos con imagen en $\mathbb{R}$ cuyo gráfico sea conocido. Graficarla e interpretar geométricamente $f(P_1) - f(P_2)$.

   (c) Demuestre que si f es una función diferenciable definida en algún abierto que contiene al segmento P_1P_2, entonces vale que

$$f(P_1) - f(P_2) = \nabla f(P) \cdot (P_1 - P_2)$$

   donde P es algún punto del segmento P_1P_2, y el producto del segundo miembro es el producto escalar de vectores.

46. (a) Sea $f : B \to \mathbb{R}$, donde B es una bola en $\mathbb{R}^2$.

   i. Pruebe que si f es constante en B, entonces $\nabla f(x, y) = 0$ cualquiera sea $(x, y) \in B$.
   ii. Pruebe que si $\nabla f(x, y) = 0$ cualquiera sea $(x, y) \in B$, entonces f es constante en B.

(b) Si $f, g : B \to \mathbb{R}$ son diferenciables, y verifican que $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$ para todo $(x, y) \in B$, pruebe que entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = g(x, y) + c$.

47. Muestre que la derivada direccional de f en el punto (x_0, y_0) en la dirección $-v$ (recordar que $||v|| = 1$) es igual a la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de v pero con el signo opuesto, o sea

$$-\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial(-v)}(x_0)$$

48. (a) Pruebe que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y tal que para algún v, $||v|| = 1$ se cumple que $Df(x) \cdot v = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces en cada recta que lleve la dirección de v, f será constante.

(b) Construya ejemplos de lo demostrado anteriormente para $n = 2$ y $v = (1, 0), (0, 1)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.