Propiedades elementales de cat. trianguladas

Fijamos $\mathcal{T}$ una categoría aditiva con funtor de suspensión [1] y una colección de "triángulos" $\{(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1])\}$ que satisface T1 T2 T3

Hecho 1: en un triángulo, la composción de 2 seguidos es cero.

dem: tomemos $(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1])$ un triángulo y consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X[-1] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1]
\end{tikzcd}$$

Hecho 2: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,-)$ manda triángulos en s.e.largas: si $(X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1])$ es triángulo y $W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{T}) \Rightarrow$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,X[-1])$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

Denotemos $H_n^W(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X[n])$, queremos ver que tenemos una s.e. larga

$$\cdots \to H_n^W(X) \to H_n^W(Y) \to H_n^W(Z) \to H_{n-1}^W(X) \to \cdots$$

(por traslación, basta ver que es exacto en un solo lugar!)

demostración: sabemos que la composición de dos seguidos es cero, luego $v_* u_* = (vu)_* = 0_* = 0$. Supogamos ahora

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z)$$

$$f \mapsto v \circ f = 0$$

Entonces podemos hacer el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[-1] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1]
\end{tikzcd}$$

o bien, trasladando para atrás,

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[-1] \arrow[r] & W[1] \\
Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1] \arrow[r, "-u[-1]"] & Y[-1]
\end{tikzcd}$$

Por T3 $\exists c$ que completa a un morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[-1] \arrow[r] \arrow[d, dashed, "c"] & W[1] \arrow[d, "f[-1]"] \\ Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1] \arrow[r, "-u[-1]"] & Y[-1] \end{tikzcd}$$

y ahora volvemos a trasladar

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "c[1]"] & W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[-1] \arrow[d, "c"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1] \end{tikzcd}$$

Si llamamos $g := c[1]$, tenemos

$$f = u \circ g = u_*(f)$$

es decir, $\mathrm{Ker}(v_*) \subseteq Im(u_*)$.

Hecho 2*: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, W)$ manda triángulos en s.e.largas:
si $(X \stackrel{u}{\to} Y \stackrel{v}{\to} Z \stackrel{w}{\to} X[-1])$ en un triángulo y $W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{T})$, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[\text{-}1],W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z,W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,W)$$

es una suc. exacta de grupos abelianos

dem: Ejercicio!

Hecho 3: (Lema de los 5) Si en un morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "c"'] & X[-1] \arrow[d, "a[-1]"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[-1] \end{tikzcd}$$

de a, b, c, dos de ellos son isos, entonces el tercero es iso.

dem: sup. a y b son isos y $W \in \mathrm{Obj}\mathcal{T} \Rightarrow$ morfismo de s.ex.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,X) \arrow[r] \arrow[d, "a_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Y) \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Z) \arrow[r] \arrow[d, "c_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,X[-1]) \arrow[d, "a[-1]_*"'] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,X') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Y') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Z') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,X'[-1]) \end{tikzcd}$$

y por el lema de los 5 tradicional c_* es iso $\forall W \Rightarrow c$ es iso.

Coro: $u : X \to Y$ determina al triángulo

$(X \stackrel{u}{\to} Y \stackrel{v}{\to} Z \stackrel{w}{\to} X[-1])$

a menos de isomorfismo (no único)

Hecho 4: $u : X \to Y$ es un iso si y sólo si $\forall$ triángulo de la forma $X \stackrel{u}{\to} Y \stackrel{v}{\to} Z \stackrel{w}{\to} X[-1]$, necesariamente $Z = 0$.

dem: basta ver que $X \stackrel{u}{\to} Y \to 0 \to X[-1]$ es un triángulo si y sólo si u es un iso.
Supongamos que u es un iso, entonces se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X[-1] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[-1]
\end{tikzcd}$$

como el de arriba es triángulo el de abajo también.
Recíprocamente,

asumiendo que $X \xrightarrow{u} Y \to 0 \to X[-1]$ es un triángulo, del cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y[-1] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[-1]
\end{tikzcd}$$

extendemos a un morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, dashed] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y[-1] \arrow[d, dashed] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[-1]
\end{tikzcd}$$

y así obtenemos una flecha $a : Y \to X$ tal que $u \circ a = \mathrm{Id}_Y$. Por el lema de los 5, a es iso, luego $u = a^{-1}$ y u un iso.

“Corolario”: Si en una categoría triangulada se quiere localizar una clase de flechas
(e.g. $\mathcal{T} = \mathcal{H}(A)$ y la clase de flechas = los qisos),

entonces

“ localizar por los q-iso” $\equiv$ “cocientar por los acíclicos”

(que son los conos de los quasi-isos.)

Construcción "concreta" de $D(A)$ a partir de $\mathcal{H}(A)$

Ejemplo: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M) = H_0(M)$

dem: $f : A \to M$ está univocamente determinado por

$$f(1) =: m \in M_0$$

Además, $d(1) = 0$ y $fd = df \Rightarrow m \in \mathrm{Ker} d_M$.
Si $f \sim g$, $f(1) = m$, $g(1) = m'$, $\exists h$ tal que

$$f - g = dh + hd$$

$\Rightarrow m - m' = dh(1) + hd(1) = d(h(1)) \Rightarrow [m] = [m'] \in H_0(M)$

Recíprocamente, si $m, m' \in M$, $f(a) = am$, $g(a) = am'$,
si $m - m' = dx$, se define $h : A \to M$

$$h(a) = ax$$

y resulta $f \sim_h g$.