Producto tensorial

$$X_A,\ {}_AY \rightsquigarrow X \otimes_A Y$$

$$\begin{aligned} X \otimes_A Y := \mathbb{Z}^{(X\times Y)} \Big/ \Big(&(x+x', y) - (x,y) - (x',y), \\ &(x, y+y') - (x,y) - (x,y'), \\ &(xa, y) - (x, ay) \Big) \end{aligned}$$

$$= X \otimes_{\mathbb{Z}} Y \Big/ \Big(xa \otimes y - x \otimes ay : x \in X,\ \ y \in Y,\ \ a \in A \Big)$$

Propiedad universal

$$\mathrm{Bil}_A(X \times Y, M) := \{f\colon X \times Y \to M \textit{ bilineal } / \ f(xa, y) = f(x, ay)\}$$

Propiedad universal: $X \times Y \to A \otimes_A Y \ \big((x, y) \mapsto x \otimes_A y\big)$ es bilineal y A-balanceada y universal con esa propiedad:

$\forall b : X \times Y \to M$ bilineal A-balanceada
$\exists!$ morfismo de grupos abelianos $\overline{b} : X \otimes_A Y \to M$ tal que

$$\overline{b}(x \otimes_A y) = b(x, y)$$

$$\begin{tikzcd} (x, y) \arrow[d, mapsto] \\ x \otimes y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "b"] \arrow[d] & M \\ X \otimes_A Y \arrow[ur, dotted, "\exists! \overline{b}"'] & \end{tikzcd}$$

Adjunción

En Homs:

$$\mathrm{Bil}_A(X \times Y, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X \otimes_A Y, M)$$

$+$ la ley exponencial:

$$\cong \mathrm{Hom}_{-A}(X_A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AY, M))$$

y también $\quad \cong \mathrm{Hom}_{A-}({}_AY, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_A, M))$

Consecuencia:
Si $G(Y) = X \otimes_A Y$, G : ${}_A$-mod$\to \mathbb{Z}$-mod,

$$\boxed{\boxed{\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Y), M) \cong \mathrm{Hom}_A(Y, F(M))}}$$

donde $F(M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_A, M) \in {}_A$-mod

Consecuencia 1

$$Y_i \to \lim_{\to I} Y_i \qquad \rightsquigarrow$$

$$X \otimes_A Y_i \longrightarrow X \otimes_A \left(\lim_{\to I} Y_i \right)$$

y la propiedad universal determina la flecha

$$\boxed{\lim_{\to I}(X \otimes_A Y_i) \to X \otimes_A \left(\lim_{\to I} Y_i \right)}$$

y por tener adjunto a derecha, es un $\boxed{\text{isomorfismo}}$.

En particular $X \otimes_A (\oplus_i Y_i) \cong \oplus_i (X \otimes_A Y_i)$

Consecuencia 1: dem

Llamamos $G(-) = X \otimes_A -$. Para cualquier grupo abeliano W,

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(G(\varinjlim_I Y_i), W\right) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\varinjlim_I Y_i, FW\right) \arrow[d, "\cong"] \\
& \varprojlim_I \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y_i, FW) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\varinjlim_I G(Y_i), W\right) \arrow[r, "\cong"] & \varprojlim_I \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(GY_i, W)
\end{tikzcd}
$$

Lema: En $\mathcal{C}$, $U \cong V \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ $\forall W$ (y natural en W).
o sea, $\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, -)$ (iso nat. de funtores)

Consecuencia 2

Si $Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0$ es una s.e.c. en A-mod, entonces

$$X \otimes_A Y \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes f} X \otimes_A Z \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes g} X \otimes_A T \longrightarrow 0$$

es una s.e.c.

dem: es una consecuencia del sgte lema

Lema s.e.c. y Hom

(dem válida en cualquier categoría abeliana)

R un anillo (e.g. $R = A, \mathbb{Z}, A^{op}, ...$),
$f : S \to M$, $g : M \to N$ morfismos de R-módulos.
Entonces

$$S \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

es una s.e.c. de R-mod $\Leftrightarrow$ para todo R-modulo W

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, W) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M, W) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(S, W)$$

es una s.e.c. de grupos abelianos. (Dem: ejercicio para pensar para la próxima ..)

Dem (de exactitud a derecha de $X \otimes_A -$)

Sea $Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0$ una s.e.c. A-mod y llamamos $G(-) = X \otimes_A -$. Queremos ver que

$$G(Y) \xrightarrow{Gf} G(Z) \xrightarrow{Gg} G(T) \longrightarrow 0$$

sea exacta.
Para esto, tomamos W un grupo abeliano arbitrario.
Por el lema anterior, basta ver que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(T), W) \xrightarrow{(Gg)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Z), W) \xrightarrow{(Gf)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Y), W)$$

Consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(T),W) \arrow[r, "(Gg)^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Z),W) \arrow[r, "(Gf)^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Y),W) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T,F(W)) \arrow[r, "g^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z,F(W)) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y,F(W))
\end{tikzcd}$$

Como $Y \to Z \to T \to 0$ es exacta,

aplicando $\mathrm{Hom}_A(-, F(W))$ la fila de abajo es exacta.

naturalidad $\Rightarrow$ los cuadrados son conmutativos.

Applicación general

"el funtor $\mathrm{Hom} \rightsquigarrow$ funtores subobjeto, pues si $N \cong A^{(X)}/S$, ($X=$ cjto. de gen., $S=$ submód. de rel.),

$$\mathrm{Hom}_A(A^{(X)}/S, M) \cong \{f : X \to M : f(S) \equiv 0\}$$

"producto tensorial $\rightsquigarrow$ funtores cocientes":

Por ejemplo: si $\epsilon : A \to k$, A un k-álgebra aumentada, k es A-móduo via

$$1 \cdot a = \epsilon(a)$$

sup. A es k-libre

$$\begin{tikzcd}
M^{(\dim_k A)} \arrow[r] & M \arrow[r] & M/(am - \epsilon(a)m) \arrow[r] & 0 \\
k \otimes_k A \otimes_k M \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & k \otimes_k M \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & k \otimes_A M \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & 0
\end{tikzcd}$$

$$1 \otimes a \otimes m \longmapsto \epsilon(a) \otimes m - 1 \otimes am$$

Tarea:

- Mirar los ejercicios de producto tensorial,
- Mirar la parte de prod. tensorial del libro,
- Mirar le lema:

$$S \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

s.e.c. de R-mod $\Leftrightarrow$ para todo R-modulo W

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, W) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M, W) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(S, W)$$

es s.e.c. de grupos abelianos