

Super k -módulos y super álgebras

Un super k -espacio vectorial (o super k -módulo si k es anillo conmutativo) es un k -módulo M junto con una descomposición en suma directa

$$M_0 \oplus M_1$$

Los elementos de M_0 se dirán de grado par, los de M_1 de grado impar.

Por ejemplo si M es $\mathbb{Z}$ -graduado, $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M^n$, esto induce una $\mathbb{Z}_2$ -graduación

$$M_0 := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M^{2n}, \quad M_1 := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M^{2n+1}$$

La mayoría de los ejemplos de interés son $\mathbb{Z}$ -graduados.

Estructura monoidal

Si $f : (M_0 \oplus M_1) \rightarrow (N_0 \oplus N_1)$ es k -lineal, diremos que respeta la descomposición, o que es *homogéneo de grado cero*, o par, si

$$f(M_i) \subseteq N_i$$

Los super módulos, o módulos $\mathbb{Z}_2$ -graduados, forman una categoría.

Estructura monoidal

Si $M = M_0 \oplus M_1$ y $N = N_0 \oplus N_1$ son dos super-módulos, entonces el producto tensorial también

$$\begin{aligned} M \otimes N &= M_0 \otimes N_0 \oplus M_0 \otimes N_1 \oplus M_1 \otimes N_0 \oplus M_1 \otimes N_1 = \\ &= \underbrace{(M_0 \otimes N_0 \oplus M_1 \otimes N_1)}_{(M \otimes N)_0} \oplus \underbrace{(M_0 \otimes N_1 \oplus M_1 \otimes N_0)}_{(M \otimes N)_1} \end{aligned}$$

Estructura monoidal

Si $M = M_0 \oplus M_1$ y $N = N_0 \oplus N_1$ son dos super-módulos, entonces hay **dos isomorfismos naturales**

$$M \otimes N \cong M \otimes N$$

uno el flip usual

$$m \otimes n \mapsto n \otimes m$$

y el otro: **flip con signo**

$$m \otimes n \mapsto (-1)^{|m||n|} n \otimes m$$

donde $|m|$ = grado o paridad de m (resp. $|n|$)

Obs: si $|m|$ y $|n|$ están en $\mathbb{Z}$ y no en $\mathbb{Z}_2$, en la fórmula anterior sólo importa la paridad de la graduación.

álgebras super conmutativas

super- k -álgebra asociativa $\equiv A = A_0 \oplus A_1$ k -álgebra $\mathbb{Z}_2$ -graduada:

$$A_i \cdot A_j \subset A_{i+j} \quad (i, j, i + j \text{ módulo } 2)$$

Se dice **super-conmutativa** si

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba$$

para todo par de elementos homogéneos a y b de A .

Ejemplo: $A = \wedge V$ es el álgebra exterior es super-conmutativa, con la graduación $|v| = 1 \quad \forall v \in V$.

Ejemplo: $A = k[x]$ con $|x| = 1$ es graduada con $|x| = 1$, pero no es super-conmutativa. Si tomamos $|x| = 2$ entonces $k[x]$ es **otra álgebra graduada**, y ésta, sí es super conmutativa.

Ejemplo: Si A y B son dos superálgebras, entonces en $A \otimes B$ hay **otro** producto, además del usual, dado por

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := (-1)^{|a'| |b|} aa' \otimes bb'$$

Denotamos esta estructura de álgebra como $A \hat{\otimes} B$.

Notar que

- ▶ $\hat{\otimes}$ es el coproducto en la categoría de k -álgebras super conmutativas.
- ▶ si $A = A_0$ (i.e. $A_1 = 0$) entonces $A \hat{\otimes} B = A \otimes B$.

Ejercicio: Si $V = V_0 \oplus V_1$ entonces $\text{Sym}(V) := S(V_0) \otimes \Lambda(V_1)$ es superconmutativa, y si A es super-conmutativa entonces

$$\text{Hom}_{\text{super-}k\text{-alg}}(S(V_0) \otimes \Lambda(V_1), A) \cong \text{Hom}_{\text{super-}k\text{-mod}}(V_0 \oplus V_1, A)$$

Es decir, $\text{Sym}(V) = S(V_0) \otimes \Lambda(V_1)$ es super-conmutativa libre.

Obs: $\left. \begin{array}{l} V = V_0 \oplus V_1 \\ W = W_0 \oplus W_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sym}(V \oplus W) = \text{Sym}(V) \hat{\otimes} \text{Sym}(W).$

Super Lie

Un super módulo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ se dice una super-álgebra de Lie si se tiene un corchete $[-, -] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que verifica

- ▶ es homogéneo de grado cero:

$$[g_i, g_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$$

- ▶ es super anti-simétrico: $\forall x, y \in \mathfrak{g}$ homogéneos

$$[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$$

- ▶ y satisface super-Jacobi: $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ homogéneos,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{|x||y|}[y, [x, z]]$$

Obs: $\mathfrak{g}_0$ es super-subálgebra de Lie y álgebra de Lie en el sentido usual. $\mathfrak{g}_1$ NO es Lie usual, podría pasar $[x, x] \neq 0!$

Ejemplos

Sea $V = V_0 \oplus V_1$ un supermódulo entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{End}(V) &= \mathrm{Hom}(V_0 \oplus V_1, V_0 \oplus V_1) \\ &= \underbrace{\mathrm{End}(V_0) \oplus \mathrm{End}(V_1)}_{\mathrm{End}(V)_0} \bigoplus \underbrace{\mathrm{Hom}(V_0, V_1) \oplus \mathrm{Hom}(V_1, V_0)}_{\mathrm{End}(V)_1}\end{aligned}$$

es una super-álgebra (o sea es un álgebra $\mathbb{Z}_2$ graduada) y si f y g son homogéneos definimos el super-conmutador

$$[f, g]_s := f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f$$

$(\mathrm{End}(V), [-, -]_s)$ es superálgebra de Lie.

Super-derivaciones

Sea $A = A_0 \oplus A_1$ una superálgebra (asociativa o no).
Las super derivaciones

$$\mathrm{Der}_s(A) \subseteq \mathrm{End}(A)$$

se definen por $\mathrm{Der}_s(A) = \mathrm{Der}_s(A)_0 \oplus \mathrm{Der}_s(A)_1$ con

$$\mathrm{Der}_s(A)_n = \{D \in \mathrm{End}(A)_n : D(ab) = D(a)b + (-1)^{n|a|}aD(b)\}$$

Ejercicio: $\text{Der}_s(A)$ es sub-superálgebra de Lie de $\text{End}(A)$:

- ▶ $D \in \text{Der}_s(A)_0, E \in \text{Der}_s(A)_i$ con $i = 0, 1$,
 $\Rightarrow DE - ED \in \text{Der}_s(A)_i$.
- ▶ $D, E \in \text{Der}_s(A)_1 \Rightarrow DE + ED \in \text{Der}_s(A)_0$
(o sea, derivación en el sentido usual)

Además, D es impar, $[D, D] = 2D^2$ es una derivación usual, pero también D^2