Álgebra Homológica

Suavidad y HKR

Notación: $HH_\bullet(A) := H_\bullet(A, A)$ y $HH^\bullet(A) := H^\bullet(A, A)$.

1. Utilice la resolución

$$0 \to TV \otimes V \otimes TV \to TV \otimes TV \to TV \to 0$$

$$1 \otimes v \otimes 1 \mapsto v \otimes 1 - 1 \otimes v$$

   de TV como TV-bimódulo para describir un complejo que calcule $HH_\bullet(TV)$ y $HH^\bullet(TV)$.

2. (supogamos k cuerpo) Sean A y B dos k-álgebras sobre un cuerpo k, muestre que $HH_\bullet(A \otimes B) \cong HH_\bullet(A) \otimes HH_\bullet(B)$.

3. (supogamos k cuerpo) Sea A tal que admite una resolución de A^e-módulos proyectivos de tipo finito (por ejemplo si A^e es noetheriano). Muestre que $HH^\bullet(A \otimes B) \cong HH^\bullet(A) \otimes HH^\bullet(B)$.

4. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita, muestre que

$$HH_\bullet(S(V)) \cong S(V) \otimes \Lambda^\bullet V$$

$$HH^\bullet(S(V)) \cong S(V) \otimes \Lambda^\bullet V^*$$

   Sugerencia: para $\dim V = 1$, $V = kx$ entonces $S(V) = k[x] = T(kx)$, se puede calcular como en el ejercicio 1. Para $\dim V > 1$, si $V = V_1 \oplus V_2$ muestre que $S(V_1 \oplus V_2) \cong S(V_1) \otimes S(V_2)$, idem para $\Lambda^\bullet(V_1 \oplus V_2)$, y utilice los ejercicios 2 y 3.

5. Sea $0 \to M \to B \to A \to 0$ una s.e.c. donde $p : B \to A$ es un epi de k-álgebras con núcleo M de cuadrado cero.

   (a) Sea $s : A \to B$ una sección k-lineal. Se define $f_s : A^{\otimes 2} \to B$ vía

$$f_s(a \otimes a') := s(a)s(a') - s(aa')$$

   claramente, si s es una sección multiplicativa, $f_s \equiv 0$. Muestre que $Im(f_s) \subseteq \mathrm{Ker}(p) = M$, y por lo tanto $f_s : A^{\otimes 2} \to M$.

   (b) Sea $\widetilde{s} : A \to M$ *otra* sección, denotamos $f = f_s$ y $\widetilde{f} = f_{\widetilde{s}}$. Muestre que f es cohomóloga a $\widetilde{f}$, es decir, $[f] = [\widetilde{f}]$ en $H^2(A, M)$, o sea, existe $D : A \to M$ tal que $f - \widetilde{f} = \partial D$.
   concluya que la asignación

$$(0 \to M \to B \to A \to 0) \mapsto [f] \in H^2(A, M)$$

   que a una s.e.c. que se parte como sucesión de k-módulos, le asigna el 2-cociclo f, esta bien definida.

(c) Muestre que una sucesión $0 \to M \to B \to A \to 0$ que se k-parte admite una sección de k-álgebras si y sólo si el cociclo $[f]$ correspondiente es 0 en $H^2(A, M)$.

Definición: Sea A conmutativa, se dice **suave** si para tiene la siguiente propiedad de levantamiento: $\forall$ k-álgebra conmutativa C y todo ideal $I \subset C$ de cuadrado cero, si $f : A \to C/I$ es un morfismo de k-álgebras,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r, "p"] & C/I \arrow[r] & 0 \\ & & & A \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted, "\exists \widetilde{f}"] & \end{tikzcd}$$

Es decir, si $p*$

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}(A, C) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}_{k-alg}(A, C/I) \to 0$$

es suryectiva, para toda k-álgebra conmutativa C e ideal $I \subset C$ de cuadrado cero.

6. Sea A k-álgebra conmutativa, M un A-módulo, que lo vemos como A-bimódulo simétrico, y $f : A^{\otimes 2} \to M$ un 2-cociclo de Hochschild. Muestre que

$$B := (M \oplus A, *_f)$$

es una k-álgebra conmutativa $\iff$ f es simétrico, es decir, $f(a \otimes a') = f(a' \otimes a)$ $\forall a, a' \in A$.

7. Sea un diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r, "p"] & C/I \arrow[r] & 0 \\ & & & A \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd}$$

como en la definición de suavidad. Muestre que

(a) el pull-back

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r, "p"] & C/I \arrow[r] & 0 \\ & & A \prod_{C/I} C \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$$B := A \prod_{C/I} C = \{(a, c) \in A \times C : f(a) = p(c)\}$$

es una k-álgebra (conmutativa) y que la flecha $B \to A$ es sobreyectiva, con núcleo un ideal de cuadrado cero (isomorfo a I).

(b) Si p es k-split, entonces $B \to A$ es k-split, y por lo tanto $B \cong (I \oplus A, *_f)$ para un cierto 2-cociclo simétrico $f : A^{\otimes 2} \to I$.

(c) Muestre que si el 2-cociclo f anterior es cohomólogo a 0, entonces existe $s : A \to B$ un splitting de álgebras de $B \to A$ y por lo tanto existe $\widetilde{f}$ como en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r, "p"] & C/I \arrow[r] & 0 \\
 & & A \prod_{C/I} C \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted, "\widetilde{f}"'] \arrow[l, dotted, bend left, "s"] &
\end{tikzcd}$$

(d) Supongamos k es un cuerpo y A una k-álgebra conmutativa. Muestre que si para todo A-módulo a izquierda M, que lo vemos como A-bimódulo simétrico, si todo 2-cociclo $f : A^{\otimes 2} \to M$ es cohomólogo a uno antisimétrico, entonces A es suave.

(e) Use la resolución de Koszul de $A = S(V)$ para mostrar que $S(V)$ es suave.