Lema de la serpiente: introducción

Sea

$$0 \to S \to^i T \to^p M \to 0$$

una s.e.c. de $k[x]$-modulos. Por comodidad supondremos que i es una inclusión y p la proyeccion al cociente (o sea, $S \subseteq T$ y $M = T/S$). Se definen

$$M^x = \{m : x \cdot m = 0\}$$

$$M_x = \frac{M}{x \cdot M}$$

(y similarmente para S y T). Construiremos un morfismo

$$\delta : M^x \to S_x$$

$$m \in M^x \subseteq M = T/S$$
$$\Rightarrow m = \overline{t}$$

con $t \in T$. Luego, tambien

$$x \cdot t \in T$$

Pero

$$M = T/S \ni \overline{x \cdot t} = x \cdot \overline{t} = x \cdot m = 0$$

pues $m \in M^x$. Es decir, $x \cdot t \in S$.
La clase de $x \cdot t$ es cero módulo $x \cdot T$, pero no necesariamente es cero módulo $x \cdot S$. Se define

$$\delta : M^x \to S_x$$

$$m = \overline{t} \mapsto x \cdot t \text{ Mod } x \cdot S$$

Ejercicio: (2) de la práctica 1

δ esta bien definido
(i.e. si $m = \bar{t} = \bar{t}' \in M = T/S \Rightarrow x \cdot t \equiv x \cdot t'$ MOD $x \cdot S$),

δ es k-lineal, y

$$0 \to S^x \to T^x \to M^x \to^{\delta} S_x \to T_x \to M_x \to 0$$

es una sucesion exacta

Algunas conclusiones / observaciones

- $(-)^x : k[x]$-mod$\to$ k-mod es un funtor, que preserva monomorfismos pero no epimorfismos (encuentre un ejemplo con $S_x \neq 0$ y $\delta \neq 0$, e.g. si $T_x = 0$,(por qué?)).
- $(-)_x : k[x]$-mod$\to$ k-mod es un funtor, que preserva epimofismos pero no monomorfismos (encuentre un ejemplo donde $M^x \neq 0$ y $\delta \neq 0$, e.g. si $T^x = 0$).
- Sugerencia: escriba la s.exacta para $T = k^2$ o k^3 donde x es una matriz de un solo bloque de Jordan.
- $(-)^x \cong \mathrm{Hom}_{k[x]}(k, -)$ donde la acción de x en k es cero.
- Todo funtor del tipo $\mathrm{Hom}_{k[x]}, (M, -)$ preserva monomorfismos, asi que $(-)_x$ NO es de este tipo (o sea, $(-)_x$ no es representable, como funtor de la categoría de $k[x]$-módulos).