ÁLGEBRA HOMOLÓGICA

1 Resoluciones funtoriales 1

1. Sea M un A-módulo, se define $P(M) = A^{(M)}$ y $p_M : A^{(M)} \to M$ vía
$$\sum_{m\in M} a_m e_m \mapsto \sum_{m\in M} a_m m$$
Se define $Z_0(M) := \mathrm{Ker} p_M$, $P_1(M) := A^{(Z_0)}$ y $d_1 : P_1(M) \to P_0(M)$ como la composición
$$P_1(M) = A^{(Z_0)} \to Z_0(M) = \mathrm{Ker}(p_M) \hookrightarrow P_0(M)$$
y así continuamos, $Z_1(M) = \mathrm{Ker}(d_1)$, $d_2 : P_2(M) = A^{(Z_1)} \to Z_1 \hookrightarrow P_1(M)$ etc. Muestre que
$$\cdots \to P_n(M) \to \cdots \to P_1(M) \to P_0(M) \to M \to 0$$
es una resolución libre y por lo tanto proyectiva de M. Además, todos los $P_i(M)$ son funtoriales en M y los d_i son transformaciones naturales. En otras palabras, esta resolución es funtorial en M, como funtor de A-Mod en Chain(A).

2. Sea A un anillo con $gldim(A) = d < \infty$, y para cada $M \in A$-mod, sea
$$\cdots \to P_n(M) \to \cdots \to P_1(M) \to P_0(M) \to M \to 0$$
la resolución del ejercicio anterior. Muestre que la resolución
$$0 \to K_d \to P_{d-1}(M) \to P_{d-2}(M) \to \cdots \to P_1(M) \to P_0(M) \to M \to 0$$
(donde $K_d = \mathrm{Ker}(P_{d-1} \to P_{d-2})$) es una resolución proyectiva y también funtorial.

2 Resolucion standard

$$\cdots \to A^{\otimes n+1} \to \cdots \to A^{\otimes 3} \to A^{\otimes 2} \to A \to 0$$

Sea A una k-álgebra. Definimos
$$B_n(A) := A^{\otimes n+1}$$
con diferencial
$$b'(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n - a_0 \otimes a_1a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \pm$$
$$\pm \cdots + (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_ia_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n + \cdots + (-1)^{n-1} a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}a_n$$
En grados bajos:
$$b'(a \otimes b \otimes c) = ab \otimes c - a \otimes bc$$
$$b'(a \otimes b) = ab = m(a \otimes b)$$

1. Sea $s : A^{\otimes n} \to A^{\otimes n+1}$ k-lineal dada por

$$s(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) := 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n$$

   Calcular $sb' + b's$ y concluya que $(B_\bullet(A), b')$ es exacta.

2. Sea M un A-bimódulo (en particular M es un k-bimódulo) y sea V un k-bimódulo. Muestre que hay un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{A-bimod}(A \otimes_k V \otimes_k A, M) \cong \mathrm{Hom}_{k-bimod}(V, M)$$

   Concluya que si V es proyectivo como k-bimódulo, entonces $A \otimes V \otimes A$ es proyectivo como A-bimódulo.

3. Un A-bimódulo M se dice k-simétrico si

$$\lambda \cdot m = m \cdot \lambda \ \forall m \in M, \ \lambda \in k$$

   Muestre que la categoría de A-bimódulos simétricos se identifica con la categoría de $A \otimes A^{op}$-módulos a izquierda (o a derecha) vía

$$(a \otimes a') \cdot m = ama' = m \cdot (a' \otimes a)$$

   Notación: $A^e := A \otimes A^{op}$

4. Concluya que $(B_\bullet(A), b')$ provee de una resolución de A como A-bimódulo k-simétrico.

Definición: Si M es un A-bimódulo k-simétrico se define

$$H_\bullet(A, M) = \mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A, M)$$

(en la notación se sobreentiende k, si hace fata se denota $H_\bullet(A; k, M)$)

$$H^\bullet(A, M) = \mathrm{Ext}_{A^e}^\bullet(A, M)$$

se llama la homología y cohomología de Hochshild de A a coeficientes en M

5. $H^0(A, M) \cong M^A := \{m \in M : am = ma \ \forall a \in A\}$.

6. $H^1(A, M) = \mathrm{Der}_k(A, M)/Innder(A, M)$, donde $\mathrm{Der}_k(A, M) = \{D : A \to M$ k-lineal$/D(ab) = aD(b) + D(a)b \forall a, b \in A\}$, $Innder = \{D : \exists m_0 \in M/D(a) = am_0 - m_0 a\}$

3 Posibles temas final

1. La acción de $Aut(A)$ (y de InnAut), de $\mathrm{Der}_k(A)$ (y la de $InnDer(A)$). Si A es graduada y la derivación Euleriana es interior.
2. Estructura de Gerstenhaber? conmutatividad de $HH^\bullet(A)$
3. HKR: A suave esencialmente de tipo finito $\Rightarrow HH_\bullet(A) \cong \Omega_k^\bullet(A)$
4. (co)-homología de álgebras de Hopf y $\mathrm{Ext}_H^\bullet(k, k)$
5. La teoría relativa a kQ_0 (o a una subalgebra separable), quivers y ciclos orientados.

4 Dimensión Hochschild, dimensión global, resoluciones funtoriales 2

1. Si L es A^e-libre, digamos $L \cong (A^e)^{(I)}$ para un conjunto I, denotemos $V = k^{(I)}$, entonces

$$L \cong A^e \otimes_k V \cong A \otimes V \otimes A$$

donde en A^e se toma la estructura usual de A^e-módulo a izquierda, y en $A \otimes V \otimes A$ se toma la estructura de bimódulo "exterior", específicamente

$$(a \otimes a') \cdot (a_1 \otimes v \otimes a_2) = aa_1 \otimes v \otimes a_2 a'$$

2. Si L es A^e libre, lo vemos como A-bimódulo (k-simétrico), entonces para cualquier A-módulo a izquierda M, $L \otimes_A M$ es un A-módulo a izquierda libre. Si $L \cong A^e \otimes V$ y lo vemos como A-bimódulo entonces $L \otimes_A M \cong A \otimes (V \otimes M)$. Concluir que si P es A^e-proyectivo entonces $P \otimes_A M$ es proyectivo como A-módulo a izquierda.

3. Muestre que si $P_\bullet \to A$ es una resolución de A como A^e-módulo entonces es contráctil como resolución de A-modulos a derecha, y por lo tanto al tensorizar $- \otimes_A M$ sigue exacta y $P_\bullet \otimes_A M$ resulta una resolución de M. (De paso, es una resolución funtorial en M.)

4. Muestre que si k es un cuerpo, si $A = TV$ (el álgebra tensorial), $A = kQ$ (el álgebra de caminos de un quiver), son álgebras de dimensón global 1.

5. Sea Q un quiver sin ciclos orientados (y por lo tanto kQ es de dimensión finita) y sea I el ideal bilátero generado por Q_1. Utilice la resolución conocida (si no la conoce, deje este ejercicio y vaya a conocerla) para mostrar que $A = kQ/I^2$ tiene dimensión global finita, igual a la longitud del camino más largo posible en Q. Para el quiver

$$1 \to 2 \to \cdots \to n$$

el álgebra kQ/I^2 tiene dimensión global n.

6. Sea k un cuerpo y consideramos $A = k(x)$=el cuerpo de fracciones de $k[x]$. Muestre que $\mathrm{Der}_k(k(x), k(x)) \neq 0$, luego $0 \neq HH^1(A, A) = \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, A)$ y por lo tanto $pdim_{A^e}(A) \geq 1$ (de hecho, es igual a 1). Sin embargo $gldim(A) = 0$ pues A es un cuerpo, lo que muestra que la desigualdad $gldim(A) \leq pdim_{A^e}(A)$ puede ser estricta.

5 Adicionales de resoluciones

1. Sea $A = A_1 \times A_2$ el producto cartesiano de anillos (con producto coordenada a coordenada). Muestre que todo módulo M es canónicamente isomorfo a $M = M_1 \times M_2$ donde M_i es un A_i-módulo; M es proyectivo como A-módulo si y sólo si M_i lo es como A_i-módulo. Más aún, si N es otro A-módulo, entonces

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{A_1}(M_1, N_1) \times \mathrm{Hom}_{A_2}(M_2, N_2)$$

Si $P^1_\bullet$ es una resolución de M_1 y $P^2_\bullet$ es una resolución de M_2, entonces

$$P_n = P^1_n \times P^2_n$$

con diferencial coordenada a coordenada es una resolución de $M_1 \times M_2$.

2. Sea k un anillo conmutativo y A y B dos k-algebras (podría ser $k = \mathbb{Z}$).

   (a) Si M es un A-módulo y N un B-módulo, muestre que $M \otimes_k N$ es un $A \otimes_k B$-módulo de manera natural.

   (b) Si L es A-libre y F es B-libre entonces $L \otimes F$ es $A \otimes B$-libre. Deduzca que si si P es A-proyectivo y Q es B-proyectivo entonces $P \otimes Q$ es $A \otimes B$-proyectivo.

   (c) Si $P_\bullet \to M$ y $Q_\bullet \to N$ son dos resoluciones y k es un cuerpo entonces $P^1_\bullet \otimes P^2_\bullet$ (el producto tensorial de los complejos) es una resolución A-proyectiva de $M \otimes N$. Muestre que si (k es cuerpo y) M, M' son A-módulos a derecha e izquierda respectivamente y N, N' son B-módulos a izq y derecha resp. entonces

   $$\mathrm{Tor}^\bullet_{A\otimes B}(M \otimes N, M' \otimes N') = \mathrm{Tor}^\bullet_A(M, M') \otimes \mathrm{Tor}^\bullet_B(N, N')$$

   (d) Muestre que si P es A-proyectivo de tipo finito, Q un B-modulo proyectivo de tipo finito, entonces el morfismo natural

   $$\mathrm{Hom}_A(P, M) \otimes_k \mathrm{Hom}_B(Q, N) \to \mathrm{Hom}_{A\otimes_k B}(P \otimes_k Q, M \otimes_k N)$$

   es un isomorfismo.

   (e) Supongamos que M y N admiten resoluciones proyectivas tal que en cada grado los proyectivos son finitamente generados (por ejemplo si M y N son finitamente generados y A y B son anillos noetherianos) Suponiendo que k es cuerpo, muestre que

   $$\mathrm{Ext}^n_{A\otimes B}(M \otimes_k N, U \otimes V) \cong \bigoplus_{p=0}^{n} \mathrm{Ext}^p_A(M, U) \otimes \mathrm{Ext}^{n-p}_B(N, V)$$

   para todo A-módulo U y B-módulo V.

   (f) Sean A y B dos k-algebras aumentadas, es decir, se tienen dados morfismos de álgebras $\epsilon : A \to k$ y $\eta : B \to k$. Supongamos que A es Noetheriana, k-libre, y k un dominio principal (e.g. $\mathbb{Z}$, o un cuerpo), muestre que

   $$\mathrm{Ext}^\bullet_{A\otimes_k B}(k, k) \cong \mathrm{Ext}^\bullet_A(k, k) \otimes_k \mathrm{Ext}^\bullet_B(k, k)$$

   (g) Explicite los cálculos de Tor y Ext para

      i. $k[x, y] \cong k[x] \otimes k[y] = A \otimes B$ con $M = M' = N = N' = k$,

      ii. $k[x, y]/(x^2, y^2) \cong (k[x]/(x^2)) \otimes (k[y]/(y^2))$, con $M = M' = N = N' = k$

3. Sea F_n el grupo libre con n generadores $x_1, \dots, x_n$ y k un anillo conmutativo. Muestre que la aplicación $k[F_n]$-lineal determinada por

$$\bigoplus_{i=1}^{n} k[F_n]e_i \to k[F_n]$$

$$e_i \mapsto x_i - 1$$

es inyectiva (comparar con el ejercicio 6 de la 2da parte de la practica 6). Concluya que

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} k[F_n]e_i \to k[F_n] \to^{\epsilon} k$$

donde $\epsilon(g) = 1$ para todo $g \in F_n$, es una resolución libre de k como $k[F_n]$-modulo. En particular $H^k(F_n, M) = H_k(F_n, M) = 0$ para todo $k > 1$ y para todo $k[F_n]$-modulo M.

4. Sean

$$(E) = (0 \to X \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \xrightarrow{\epsilon} Y \to 0)$$
$$(F) = (0 \to Y \xrightarrow{\eta} F_1 \to F_2 \to \cdots \to F_m \to Z \to 0)$$

dos extensiones (de (Y, X) y de (Z, Y), de grado n y m respectivamente), muestre que

$$0 \to X \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \xrightarrow{\eta\epsilon} F_1 \to F_2 \to \cdots \to F_m \to Z \to 0$$

es una extensiones de grado $n + m$, y que esto dota al conjunto de las extensiones de un producto asociativo: este producto está bien definido en la clase de equivalencia de extensiones.

5. Sea k un cuerpo y $A = kQ$, $K = kQ_0$ donde $Q = (Q_1, Q_0)$ es un quiver con Q_0 finito.

   (a) Si V es un kQ_0-Mod a izquierda entonces $A \otimes_{kQ_0} V$ es A proyectivo, además es un sumando directo de $A \otimes V$ (que es A-libre).

   (b) Si V es un kQ_0 bimódulo (por ejemplo kQ_1), entonces $A \otimes_{kQ_0} V \otimes_{kQ_0} A$ es un sumando directo de $A \otimes V \otimes A$, en particular, es proyectivo en la categoría de A-bimódulos k-simétricos.

   (c) Muestre que

   $$0 \to A \otimes_{kQ_0} kQ_1 \otimes_{kQ_0} A \to A \otimes_{kQ_0} A \to A \to 0$$

   provee de una resolución de A como bimódulo k-simétrico y por lo tanto, para cualquier $M \in A$-Mod,

   $$0 \to A \otimes_{kQ_0} kQ_1 \otimes_{kQ_0} M \to A \otimes_{kQ_0} M \to M \to 0$$

   da una resolución A-proyectiva de M. Concluya que kQ es hereditario (i.e. submódulo de un proyectivo es proyectivo).

(d) Notar que kQ es graduada (por la longitud de los caminos), por lo tanto kQ_0 no sólo es subálgebra sino que se tiene un morfismo de álgebras $kQ \to kQ_0$ (que manda Q_1 cero). Utilizar la resolución anterior para dar una descripción general de $\mathrm{Tor}_1^{kQ}(kQ_0, kQ_0)$.

(e) Explicitar todo lo anterior para el quiver con un único punto y una única flecha (un loop), para un solo punto y varias flechas, para dos puntos y una flecha de uno en otro, para dos puntos y varias flechas.

(f) (*) Sea $A = kQ/I$ donde Q es un quiver e I es el ideal generado por PQ_2=los caminos de longitud 2. Muestre que

$$\cdots \to A\otimes_{kQ_0}kQ_n\otimes_{kQ_0} \to \cdots \to A\otimes_{kQ_0}kQ_2\otimes_{kQ_0} \to A\otimes_{kQ_0}kQ_1\otimes_{kQ_0} \to A\otimes_{kQ_0}A \to A \to 0$$

donde el diferencial está dado por

$$A \otimes_{kQ_0} kQ_n\otimes_{kQ_0} \to A \otimes_{kQ_0} kQ_{n-1}\otimes_{kQ_0}$$

$$1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_n \otimes 1 \mapsto \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_n \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \otimes \alpha_n$$

y el úlltimo diferencial es la multiplicación.

(g) Explicitar la resolución anterior para

i. $k[x]/(x^2)$ visto como álgebra de quiver con un solo loop.

ii. $k \oplus V$ con V un ideal con producto nulo. (un solo punto y tantos loops como $\dim_k V$)

iii. Q cada uno de los quivers

$$1 \to 2$$

$$1 \to 2 \to 3$$

$$1 \to 2 \to 3 \to 4$$