Álgebra Homológica

Loalización en CO-homología

Definición: un A-módulo M se dice **finitamente presentado** si existe una sucesión exacta del tipo

$$A^m \xrightarrow{p_2} A^n \xrightarrow{p_1} M \longrightarrow 0$$

(con $n, m \in \mathbb{N}$)

1. Si M es finitamente presentado y N arbitrario $\Rightarrow \exists$ una s.exacta de la forma

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to N^n \to N^m$$

2. Muestre que $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es un $Z(A)$-módulo vía

$$(a \cdot f)(m) := af(m) \quad (= f(am))$$

Observación: Si $S \subset A$ es un subconjunto central y multiplicativamente cerrado, existe una flecha natural (el funtor localización)

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N_S)$$

$$f \mapsto \widetilde{f} = \left(\frac{m}{s} \mapsto \frac{f(m)}{s}\right)$$

que es un morfismo de $Z(A)$-módulos, en donde a la derecha, la acción de S es claramente biyectiva, por lo tanto induce un morfismo

$$\mathrm{Hom}_A(M, N)_S \to \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N_S)$$

3. Muestre que si M es finitamente presentado, entonces el morfismo anterior es un iso. (Sugerencia: utilice el hecho de que la localización preserva monomorfismos, el ejercicio 1, y la propiedad universal del núcleo.)

4. Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de A-módulos donde C_n es finitamente presentado para todo n. Muestre que para todo A-módulo N,

$$H^\bullet(\mathrm{Hom}_A(C_\bullet, N), d^*)_S \cong H^\bullet(\mathrm{Hom}_{A_S}(C_{S\bullet}, N_S), d^*)$$

5. Sea A un anillo, M y N dos A-módulos. Muestre que $\mathrm{Ext}^\bullet_A(M, N)$ es un $Z(A)$-módulo. Si $S \subset A$ es un subconjunto central y multipliativamente cerrado, entonces siempre existe un morfismo natural

$$\mathrm{Ext}^\bullet_A(M, N)_S \to \mathrm{Ext}_{A_S}(M_S, N_S)$$

Muestre que si A es un *anillo noetheriano* y M es *finitamente generado*, entonces M admite una resolución proyectiva donde cada proyectivo es finitamente generado (y por lo tanto finitamente presentado), concluya que en ese caso, para cualqueir N se tiene

$$\mathrm{Ext}^\bullet_A(M, N)_S \cong \mathrm{Ext}_{A_S}(M_S, N_S)$$

6. Sea A una k-álgebra tal que A^e es noetheriano. Muestre que A admite una resolución A^e-proyectiva
$$\cdots P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$
donde cada P_n es finitamente presentado.

7. Si $S \subset A$ es un subconjunto central y multiplicativo, considere $S^e \subset A^e$ el subconjunto multiplicativo generado por $S \otimes \{1\} \cup \{1\} \otimes S$, o sea, $\{s \otimes t : s, t \in S\}$. Muestre que para cada A-bimódulo M,
$${}_S M_S = A_S \otimes_A M \otimes_A A_S = M_{S^e}$$
Muestre que $H^\bullet(A, M)$ es un $Z(A)$-bimódulo (de hecho, es un $Z(A)$-módulo simétrico), y que y que si A admite una resolución A^e-proyectiva $P_\bullet \to A$ donde cada P_n es finitamente A^e-presentado, entonces
$$H^\bullet(A, M)_{S^e} \cong H^\bullet(A_S, {}_S M_S) \cong H^\bullet(A, {}_S M_S)$$
Sugerencia: muestre que si $P_\bullet \to A$ es una resolución como A-bimódulo, entonces
$$A_S \otimes_A P_\bullet \otimes_A A_S \to A_S \otimes_A A \otimes_A A_S$$
es exacto, y por lo tanto se tiene una resolución A_S^e-proyectiva de $A_S \underset{A}{\otimes} A \underset{A}{\otimes} A_S \cong A_S$.

8. Sea k un cuerpo y $A = k(x_1, \ldots, x_n) = Frac(k[x_1, \ldots, x_n])$ el cuerpo de fracciones de polinomios en n variables. Muestre que $pdim_{A^e}(A) = n$ (y por otra parte $gldim(A) = 0$ pues es un cuerpo). O sea, HH detecta grado de trascendencia.