Categoría opuesta

$$\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^{op}$$

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{op}),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

$$f \circ_{op} g := g \circ f$$

$$\mathcal{C}: \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{C}^{op}: \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ_{op} g"'] & Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Producto categórico

coproducto

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\iota_a"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& X \coprod Y \arrow[r, dotted, "\exists!"] & Z' \\
Y \arrow[ur, "\iota_b"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\forall X \xrightarrow{f} Z', \; Y \xrightarrow{g} Z'$

$\rightsquigarrow$ producto:

$$\begin{tikzcd}
& & X \\
Z' \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] \arrow[r, dotted, "\exists!"] & X \prod Y \arrow[ur, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

push-out / pull-back

push-out:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "a"] & \\ Y \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "b"'] & X \coprod_Z Y \arrow[dr, dotted, "\exists !"] & \\ & & W \end{tikzcd}$$

pull-back

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"'] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, dotted, "\exists !"] \arrow[drr, bend left, "a"] \arrow[ddr, bend right, "b"'] & & \\ & X \prod_Z Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"'] \\ & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Límite categórico

Dado $(I, \leq)$, $\mathcal{C}$

un sistema directo en $\mathcal{C}$:

$$\{X_i \overset{\iota_{ij}}{\to} X_j\}_{i\leq j}$$

sistema inverso en $\mathcal{C}$

$$\{X_i \overset{p_{ij}}{\leftarrow} X_j\}_{i\leq j}$$

un colímite, o límite directo

de un sistema directo $\{X_i \xrightarrow{\iota_{ij}} X_j\}_{i \leq j}$ en $\mathcal{C}$ es un objeto

$$X = \varinjlim_{I} X_i$$

junto con flechas $\{X_i \xrightarrow{\iota_i} X\}_{i \in I}$, tales que $\iota_{ij}\iota_i = \iota_j \ \forall i \leq j$,

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_{ij}"] \arrow[d, "\iota_i"'] & X_j \arrow[dl, "\iota_j"] \\ X & \end{tikzcd}$$ universal en el sentido:

$$\forall \{f_i \colon Y \to X_i\}_{i \in I} \ / \ \iota_{ij} f_i = f_j (\forall i \leq j), \ \exists! f \colon Y \to \varinjlim_{I} X_i \ / f_i = f\iota_i$$

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "\iota_{ij}"'] \arrow[rr, bend left, "f_i"] & X \arrow[r, dotted, "\exists! f"] & Y \\ X_j \arrow[ur, "\iota_j"'] \arrow[urr, bend right, "f_j"'] & & \end{tikzcd}$$

un límite, o límite inverso

de un sistema inverso $\{X_i \overset{p_{ij}}{\leftarrow} X_j\}_{i\leq j}$ en $\mathcal{C}$ es un objeto

$$X = \varprojlim_{I} X_i$$

junto con flechas $\{X_i \overset{p_i}{\leftarrow} X\}_{i\in I}$, tales que $p_i p_{ij} = p_j \ \forall i \leq j$,

$$\begin{tikzcd} X_i & X_j \arrow[l, "p_{ij}"'] \\ X \arrow[u, "p_i"] \arrow[ur, "p_j"'] & \end{tikzcd}$$

universal en el sentido:

$$\forall \{f_i : X_i \to Y\}_{i\in I} \ / \ f_i p_{ij} = f_j (\forall i \leq j),\ \exists! f : \varprojlim_{I} X_i \to Y \ / \ f_i = p_i f$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[rr, bend left, "f_i"] \arrow[drr, bend right, "f_j"'] & X \arrow[r, dotted, "p_i"] \arrow[dr, dotted, "p_j"'] & X_i \\ & & X_j \arrow[u, "p_{ij}"'] \end{tikzcd}$$

Límite (inverso) categórico en Sets

Si en el cjto I no hay elementos comparables (salvo las igualdades)

$$\lim_{\leftarrow I} X_i = \prod_{i\in I} X_i = \text{producto cartesiano}$$

Si I tiene elementos comparables

$$\Rightarrow \lim_{\leftarrow I} X_i = \left\{ \{x_i\}_{i\in I} : x_i = p_{ij}(x_j), \forall i \leq j \right\} \subseteq \prod_{i\in I} X_i$$

con las aplicaciones

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_{\leftarrow I} X_i \arrow[rr, "p_i"] \arrow[dr, "\subseteq"'] & & X_i \\
& \prod_{i\in I} X_i \arrow[ur, "\pi_i"] \arrow[r, "\pi_j"'] \arrow[ur, phantom, "(?!?)"', shift right=3ex] & X_j \arrow[u, "p_{ij}"']
\end{tikzcd}$$

(co)lim y Hom

(Colim)
$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "\iota_{ij}"'] \arrow[rr, bend left, "f_i"] & \varinjlim_I X_i \arrow[r, dotted, "\exists! f"] & Y \\ X_j \arrow[ur, "\iota_j"'] \arrow[urr, bend right, "f_j"'] & & \end{tikzcd}$$
dice....

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\varinjlim_{I} X_i, Y\right) \overset{1\text{-}1}{\longleftrightarrow} \varprojlim_{I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y)}, \quad f \mapsto \{f \circ \iota_i\}_{i \in I}$$

(Lim) mientras que
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dotted, "\exists! f"] \arrow[rr, bend left, "f_i"] \arrow[drr, bend right, "f_j"'] & X \arrow[r, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & X_i \\ & & X_j \arrow[u, "p_{ij}"'] \end{tikzcd}$$
dice

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Y, \varprojlim_{I} X_i\right) \cong \varprojlim_{I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i)}, \quad f \mapsto \{p_i \circ f\}_{i \in I}$$

Ejemplos

$$\operatorname{Hom}_{Top}(\{*\}, X) \cong X$$

El funtor olvido de *Tops* $\to$ *Sets* es (nat. iso a) $\operatorname{Hom}_{Top}(*, -)$.
Luego, el *conjunto subyacente* al espacio topológico $X \prod Y$ calculado en la categoría Top, es el conjunto $X \times Y$.
Idem para límites en general.

Si A es un anillo, entonces (propiedad universal de evaluación)

$$\operatorname{Hom}_{An}(\mathbb{Z}[x], A) \cong A$$

$\Rightarrow$ el límite en An tiene como cjto subyacente el límite en Sets.

Idem en A-modulos, pues $M \cong \operatorname{Hom}_A(A, M)$.

(contra?)Ejemplos

Si $(I, \leq)$ lo vemos como categoría,

entonces

$i \prod j = inf(i,j)$, $i \coprod j = sup(i,j)$

Si el cjto ordenado I es una flia de subconjuntos $\{U_i\}_i$, ordenados con la inclusion, entonces

$$U_{i_0} \overset{\iota_{i_0}}{\hookrightarrow} \lim_{\rightarrow} U_i = \bigcup_i U_i$$

$$\lim_{\leftarrow} U_i = \bigcap_i U_i \overset{p_{i_0}}{\hookrightarrow} U_{i_0}$$

(contra?)Ejemplos

En k-Vect$^{\mathbb{Z}}$ = k-espacios vectoriales $\mathbb{Z}$-graduados

Si $M^{(i)} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n^i$, entonces

en la categoría k-Vect$^{\mathbb{Z}}$: $\prod_I M^{(i)} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\prod_i M_n^i)$

donde $\prod_i M_n^i$ se calcula en k-Vect (y por lo tanto en Sets)

Pero $\prod_i M^{(i)} \neq$ el producto cartesiano de los $M^{(i)}$ en general.

Ejemplo: $M^{(n)} = ke_n$, $|e_n| = n$,

$\Rightarrow \prod_{n\in\mathbb{Z}} M^{(n)} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} ke_n \neq \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}} ke_n$