

# Categoría opuesta

$$\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^{op}$$

$$\text{Obj}(\mathcal{C}) = \text{Obj}(\mathcal{C}^{op}),$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

$$f \circ_{op} g := g \circ f$$

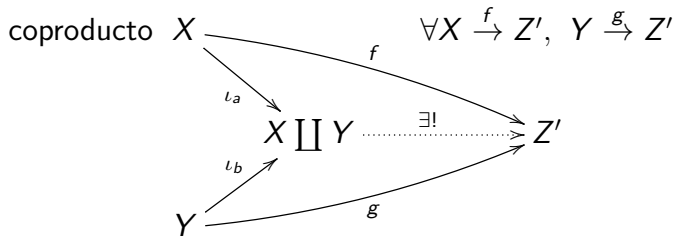
$$\mathcal{C} : \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g \circ f}$

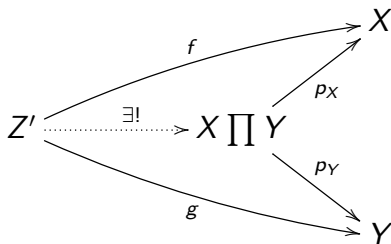
$$\mathcal{C}^{op} : \quad Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f \circ_{op} g}$

# Producto categórico



$\rightsquigarrow$  producto:



# push-out / pull-back

push-out:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ g \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{f} & X & & \\ g \downarrow & & \downarrow & \searrow a & \\ Y & \rightarrow & X \amalg_Z Y & \xrightarrow{\exists!} & W \\ & \searrow b & & & \end{array}$$

pull-back

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & f \downarrow & \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} W & & & & \\ & \searrow \exists! & & \searrow a & \\ & & X \amalg_Z Y & \rightarrow & X \\ & \searrow b & \downarrow & & f \downarrow \\ & & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

# Límite categórico

Dado  $(I, \leq)$ ,  $\mathcal{C}$

un sistema directo en  $\mathcal{C}$ :

$$\{X_i \xrightarrow{L_{ij}} X_j\}_{i \leq j}$$

**sistema inverso en  $\mathcal{C}$**


$$\{X_i \xleftarrow{P_{ij}} X_j\}_{i \leq j}$$

## un colímite, o límite directo

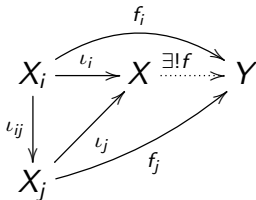
de un sistema directo  $\{X_i \xrightarrow{\iota_{ij}} X_j\}_{i \leq j}$  en  $\mathcal{C}$  es un objeto

$$X = \lim_{\rightarrow I} X_i$$

junto con flechas  $\{X_i \xrightarrow{\iota_i} X\}_{i \in I}$ , tales que  $\iota_{ij}\iota_i = \iota_j \quad \forall i \leq j$ ,

$$X_i \xrightarrow{\iota_{ij}} X_j \text{ universal en el sentido:}$$


$\forall \{f_i: Y \rightarrow X_i\}_{i \in I} / \iota_{ij}f_i = f_j (\forall i \leq j), \exists! f: Y \rightarrow \lim_{\rightarrow I} X_i / f_i = f \iota_i$




## un límite, o límite inverso

de un sistema inverso  $\{X_i \xleftarrow{p_{ij}} X_j\}_{i \leq j}$  en  $\mathcal{C}$  es un objeto

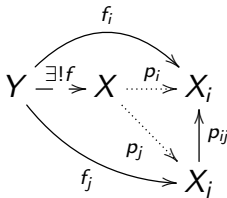
$$X = \lim_{\leftarrow I} X_i$$

junto con flechas  $\{X_i \xleftarrow{p_i} X\}_{i \in I}$ , tales que  $p_i p_{ij} = p_j \forall i \leq j$ ,

$X_i \xleftarrow{p_{ij}} X_j$  universal en el sentido:



$\forall \{f_i : X_i \rightarrow Y\}_{i \in I} / f_i p_{ij} = f_j (\forall i \leq j), \exists ! f : \lim_{\leftarrow I} X_i \rightarrow Y / f_i = p_i f$



# Límite (inverso) categórico en Sets

Si en el cjto  $I$  no hay elementos comparables (salvo las igualdades)

$$\lim_{\leftarrow I} X_i = \prod_{i \in I} X_i = \text{producto cartesiano}$$

Si  $I$  tiene elementos comparables

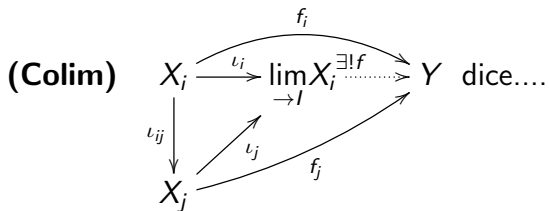
$$\Rightarrow \lim_{\leftarrow I} X_i = \left\{ \{x_i\}_{i \in I} : x_i = p_{ij}(x_j), \forall i \leq j \right\} \subseteq \prod_{i \in I} X_i$$

con las aplicaciones

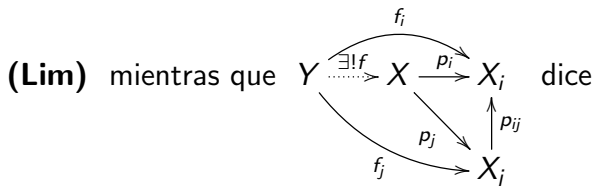
$$\begin{array}{ccc} \lim_{\leftarrow I} X_i & \xrightarrow{p_i} & X_i \\ & \searrow \subseteq & \nearrow \pi_i \\ & & \prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{\pi_j} X_j \\ & & \uparrow p_{ij} \end{array}$$

(!?)

# (co)lim y Hom



$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\lim_{\rightarrow I} X_i, Y\right) \xrightarrow{\cong} \lim_{\leftarrow I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y), \quad f \mapsto \{f \circ l_i\}_{i \in I}$$



$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Y, \lim_{\leftarrow I} X_i\right) \cong \lim_{\leftarrow I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i), \quad f \mapsto \{p_i \circ f\}_{i \in I}$$



# Ejemplos

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\{*\}, X) \cong X$$

El functor olvido de  $\mathrm{Top} \rightarrow \mathrm{Sets}$  es (nat. iso a)  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(*, -)$ .  
Luego, el *conjunto subyacente* al espacio topológico  $X \prod Y$  calculado en la categoría  $\mathrm{Top}$ , es el conjunto  $X \times Y$ .  
Idem para límites en general.

Si  $A$  es un anillo, entonces (propiedad universal de evaluación)

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(\mathbb{Z}[x], A) \cong A$$

$\Rightarrow$  el límite en  $A\text{-mod}$  tiene como cjto subyacente el límite en  $\mathrm{Sets}$ .

Idem en  $A\text{-mod}$ , pues  $M \cong \mathrm{Hom}_A(A, M)$ .

# (contra?)Ejemplos

Si  $(I, \leq)$  lo vemos como categoría,

entonces

$$i \amalg j = \inf(i, j), \quad i \coprod j = \sup(i, j)$$

Si el cjo ordenado  $I$  es una flia de subconjuntos  $\{U_i\}_i$ ,  
ordenados con la inclusion, entonces

$$U_{i_0} \xrightarrow{\iota_{i_0}} \lim_{\rightarrow} U_i = \bigcup_i U_i$$

$$\lim_{\leftarrow} U_i = \bigcap_i U_i \xrightarrow{p_{i_0}} U_{i_0}$$

# (contra?)Ejemplos

En  $k\text{-Vect}^{\mathbb{Z}} = k\text{-espacios vectoriales } \mathbb{Z}\text{-graduados}$

Si  $M^{(i)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n^i$ , entonces

**en la categoría  $k\text{-Vect}^{\mathbb{Z}}$ :**  $\prod_i M^{(i)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\prod_i M_n^i)$

donde  $\prod_i M_n^i$  se calcula en  $k\text{-Vect}$  (y por lo tanto en Sets)

Pero  $\prod_i M^{(i)} \neq$  el producto cartesiano de los  $M^{(i)}$  en general.

**Ejemplo:**  $M^{(n)} = ke_n, |e_n| = n,$

$$\Rightarrow \prod_{n \in \mathbb{Z}} M^{(n)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} ke_n \neq \prod_{n \in \mathbb{Z}} ke_n$$