Exactitud en s.e.c. vs exactitud a secas

$\therefore$ **Prop:** Sea $F : A$-Mod$\to \mathbb{Z}$-Mod que manda s.e.c. en s.e.c., entonces preserva exactitud.

dem: Sea $Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Z$ tal que $Im(f) = Ker(g)$.
Consideramos

$$FY \xrightarrow{Ff} FX \xrightarrow{Fg} FZ$$

queremos ver que $Im(Ff) = \mathrm{Ker}(Fg)$. Observamos que como F es aditivo y $F(0) = 0$, ya sabemos $Im(Ff) \subseteq \mathrm{Ker}(Fg)$.

Primero, vamos a reducir al caso g epi:

Llamamos g^c (g co-retringda) a la "misma" g pero vista de Y en su imagen,
$g^c : Y \to g(Y)$, y llamemos $i : g(Y) \to Z$ a la inclusión.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, two heads, "g^c"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & Im(g) \arrow[r, hook, "i"] & FZ \end{tikzcd}$$

Como F preserva monos y epis, siguen los monos y epis:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "F(f)"] & FY \arrow[r, two heads, "F(g^c)"] \arrow[rr, bend right, "F(g)"'] & F(Im(g)) \arrow[r, hook, "F(i)"] & FZ \end{tikzcd}$$

y ademas $F(g) = F(i) \circ F(g^c)$.
Como el diagrama conmuta: y $F(i)$ es mono

$$F(g)(u) = 0 \iff F(i)\Big(F(g^c)(u)\Big) = 0 \iff F(g^c)(u) = 0$$

Luego, $\mathrm{Ker}(F(g)) = \mathrm{Ker}(F(g^c))$.

Ahora volvemos a

$$FY \xrightarrow{Ff} FX \xrightarrow{Fg} FZ$$

y queremos ver si $Im(F(f)) = \mathrm{Ker}(F(g))$,

pero esto es lo mismo que preguntarse si

$$Im(F(f)) = \mathrm{Ker}(F(g^c))$$

o equivalentemente, haber asumido desde el principio (cambiando eventualmente g por g^c) que g era epi.

Empecemos nuevamente entonces desde
$Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ tal que $Im(f) = Ker(g)$

$$Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$ tal que $Im(f) = Ker(g)$

y consideremos

$$FY \xrightarrow{Ff} FX \xrightarrow{Fg} FZ \longrightarrow 0$$

Factorizando a $f = i \circ f^c$ donde $f^c : X \to f(X)$ y ahora $i : f(X) \to Y$ es la de $Im(f)$ en Y, tenemos el sgte diagrama

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[rrr, "F(f)"] \arrow[dr, two heads] & & & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[dd, equal] & F(Z) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& F(Im(f)) = F(\mathrm{Ker}(g)) \arrow[urr, hook, "F(i)"] & & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F(g)) \arrow[rr] & & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $g \circ i = 0$ entonces $F(i) \circ F(g) = F(i \circ g) = 0$, es decir, $F(i)(F(\mathrm{Ker}(g))$ cae dentro del núcleo de $F(g)$, y tenemos una factorización de $F(i)$:

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, two heads] & & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[dd, equal] & F(Z) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& F(Im(f)) = F(\mathrm{Ker}(g)) \arrow[ur, hook, "F(i)"] \arrow[d, dashed] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F(g)) \arrow[r] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

La flecha punteada claramente es mono, pero más aún, como $0 \to \mathrm{Ker}(g) \to^{i} Y \to^{g} Z \to 0$ es un s.e.c. y F preserva s.e.c., tenemos un morfismo de s.e.c. y (lema de los 5)

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(\mathrm{Ker}(g)) \arrow[r, "F(i)"] \arrow[d, dashed] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, equal] & F(Z) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F(g)) \arrow[r, "\subseteq"] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

y concluir que la flecha punteada es un iso '$\cong$''.

Ahora que sabemos que es un iso, mirando el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, two heads, "F(f^c)"'] & & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[dd, equal] & F(Z) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& F(Im(f)) = F(\mathrm{Ker}(g)) \arrow[ur, hook, "F(i)"'] \arrow[d, dashed, "\cong"] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F(g)) \arrow[r] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

podemos ver que $Im(F(f)) = \mathrm{Ker}(F(g))$: si $F(g)(u) = 0$,

$$\cong^{-1}(u) \in F(Ker(f)) = F(Im(f)) = Im(F(f^c))$$

la ultima igualdad es porque F preserva epis. Entonces

$$\cong^{-1}(u) = F(f^c)(v)$$

para algún $v \in FX$. $\Rightarrow$

$$u = \cong(\cong^{-1}(u)) = \cong(F(f^c)(v)) = F(i)(F(f^c)(v)) = F(f)(v)$$

o sea, $u \in Im(F(f))$.

Núcleo e imagen categóricos

En una categoría donde $\mathrm{Hom}(M, N)$ es un grupo abeliano (y la composición es bilineal), existe siempre el morfismo cero.

Núcleo: Dado $f : M \to N$, un núcleo para f es un par (K, i) donde K es un objeto, $i : K \to M$, $f \circ i = 0$ y es universal en el sentido: $\forall g : X \to M$ tal que $f \circ g = 0$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "f\circ i=0"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
& X \arrow[u, "g"] \arrow[ul, dotted, "\exists!\widetilde{g}"] \arrow[ur, bend right, "f\circ g=0"'] &
\end{tikzcd}$$

Conúcleo: conúcleo en $\mathcal{C}$ = núcleo en $\mathcal{C}^{op}$

Ejemplo: si $f : M \to N$ es un morfismo en A-Mod,

$$\mathrm{Ker}(f) = \Big(\{m \in M : f(m) = 0\}, \subseteq \Big),$$
$$\mathrm{CoKer}(f) = \Big(N/Im(f), \pi : N \to N/Im(f) \Big).$$

Notación: $Ker(f)$= el objeto, $ker(f)$=la flecha. La factorización

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^c"'] & & N \arrow[r, "\pi"] & N/Im(f) \\ & Im(f) \arrow[ur, hook, "i"'] & & \end{tikzcd}$$

nos dice $Im(f) = \mathrm{Ker}(coker(f)) \hookrightarrow N$

Def: En una categoría se define $\boxed{Im(f) = \mathrm{Ker}(coker(f))}$

El teorema de isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
Ker(f) \arrow[r, hook] & M \arrow[rr, "f"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads, "f^c"] & & N \arrow[r, "\pi"] & N/Im(f) \\
& M/\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, hook, two heads, "\sim", "\overline{f^c}"'] & Im(f) \arrow[ur, hook, "i"] & &
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{Im(f) := \mathrm{Ker}(coker(f)) = \mathrm{Ker}\left(N \xrightarrow{coker(f)} Coker(f)\right) \hookrightarrow N}$$

Obs: "al revés", $Coker(ker(f)) = M/\mathrm{Ker}(f)$, y por el 1er teo de isomofrismo sabemos que $\cong Im(f)$
Este isomorfismo: $\mathrm{Ker}(coker(f)) \cong Coker(ker(f))$
vale en A-mod, también en $\mathrm{Chain}(A)$.
Es uno de los axiomas de "categoría abeliana".

Coro: Si $F : A\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ preserva s.e.c. entonces F preserva núcleos, conúcleos, imagenes, conúcleos de núcleos por imágenes... y por lo tanto

$$H_n(F(X_\bullet)) \cong F\Big(H_n(X_\bullet)\Big)$$

Para todo $X_\bullet \in \mathrm{Chain}(A)$.

Ejemplo: M_A playo, entonces

$$H_n(M \otimes_A Y_\bullet) \cong M \otimes_A H_n(Y_\bullet)$$

para todo complejo de A-módulos $Y_\bullet$

Ext: definición

$M, N \in A$-Mod,

$$\mathrm{Ext}^n_A(M,N) := H^n(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N), d^*)$$

donde $P_\bullet \to M$ es una resolución proyectiva de M.

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d} \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d} P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0$$

$\rightsquigarrow \mathrm{Ext}^n_A(M,N) =$

$$= H^n\Big(0 \to \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_A(P_1,N) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_A(P_2,N) \xrightarrow{d^*} \cdots \Big)$$

es la (co)homología de un complejo de CO-cadenas.
Está bien definido a menos de isomorfismo (único).

Primeras propiedades

$$\mathrm{Ext}^0_A(M,N) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_A(P_1,N) \right)$$

Pero $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ manda s.e. a derecha en s.e.a izq.:
$X \to Y \to Z \to 0 \Rightarrow$
$0 \to \mathrm{Hom}_A(Z,N) \to \mathrm{Hom}_A(Y,N) \to \mathrm{Hom}_A(X,N)$

En particular,
$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \stackrel{d^*}{\to} \mathrm{Hom}_A(P_1,N)$

$\therefore \mathrm{Ext}^0_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$

Primeras propiedades

Si $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ es una s.e.c. de A-módulos

Entonces se tiene una s.e.larga

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M_3, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M_1, N) \arrow[dll, rounded corners] \\
& \mathrm{Ext}^1_A(M_3, N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(M_2, N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(M_1, N) \arrow[dll, rounded corners] \\
& \mathrm{Ext}^2_A(M_3, N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_A(M_2, N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_A(M_1, N) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Primeras propiedades

Si $N = I$ es inyectivo $\iff \mathrm{Ext}^n_A(M, I) = 0 \ \forall n > 0$

Si $M = P$ es proyectivo $\Rightarrow \mathrm{Ext}^n_A(P, N) = 0 \ \forall n > 0$.
Vale la vuelta.
Necesitamos la s.e.c. en la otra variable