Dimensión proyectiva, inyectiva y global

Definiciones:
$pdim(M) = \min n \ / \ \exists\ 0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$

$idim(M) = \min n \ / \ \exists\ 0 \to M \to I_0 \to \cdots \to I_n \to 0$

(podrían ser $+\infty$)

Teorema: (dimensión global) los siguientes números ($gldim(A)$, eventualmente $+\infty$) son iguales

1. $sup\{pdim(M) : M \in A - Mod\}$
2. $sup\{idim(M) : M \in A - Mod)\}$
3. $sup\{pdim(A/J) : J \subset A\}$
4. $sup\{n : \mathrm{Ext}^n_A(M, N) \neq 0,\ M, N \in A - Mod\}$

Lema: Son equivalentes

1. $pdim(M) \leq d$
2. $\mathrm{Ext}_A^n(M,N) = 0 \ \forall n > d \ \forall N$
3. $\mathrm{Ext}_A^{d+1}(M,N) = 0 \ \forall N$
4. $0 \to K_d \to P_{d-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ con los P_i proy $\Rightarrow K_d$ es proyectivo.

$4 \to 1 \to 2 \to 3$ ok
$3 \to 4$: Aff: $\forall N$, $\mathrm{Ext}_A^1(K_d, N) \cong \mathrm{Ext}_A^{d+1}(M,N)$

Lema*: Son equivalentes

1. $idim(N) \leq d$
2. $\mathrm{Ext}_A^n(M, N) = 0 \ \forall n > d \ \forall M$
3. $\mathrm{Ext}_A^{d+1}(M, N) = 0 \ \forall M$
4. $0 \to N \to I^0 \to \ldots I^{d-1} \to C^d \to 0$ con los I^i iny $\Rightarrow C^d$ es inyectivo.

dem: Ejercicio!

Obs: para $3 \to 4$: $\forall M$, $\mathrm{Ext}_A^1(M, C^d) \cong \mathrm{Ext}_A^{d+1}(M, N)$

podemos, luego, cambiar "$\forall M$" por "$\forall$ ideal $J \subset A$"

Dimensiones bajas:

$gldim(A) = 0 \iff$ son todos proy $\iff$ son todos iny $\iff$ A-Mod es semisimple $\iff$ $A \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots M_{n_k}(D_k)$ con D_i anillos de división $\iff$ todo lo mismo cambiando izq. por derecha.

$gldim(A) = 1 \iff$ todo submódulo de proy es proy (y $\exists$ algún no proyectivo) $\iff$ todo cociente de un inyectivo es inyectivo (y $\exists$ algún no iny)

Teorema $gldim(A[x_1,\ldots,x_n]) = gldim(A) + n$

dem: basta ver $gldim(A[x]) = gldim(A) + 1$
Obs: un $A[x]$-proyectivo es A-proyectivo.

si $gldim(A) = \infty$ es claro

si $gldim(A) = d$, sea M / $pdim_A M = d$, lo vemos como $A[x]$-mod y lo resolvemos como $A[x]$-módulo,

$$\cdots \to P_d \to P_{d-1} \to \cdots P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

los P_i son $A[x]$-proy $\Rightarrow$ son A-proy $\Rightarrow$

$pdim_{A[x]} M \geq d$ y

$$0 \to K_d \to P_{d-1} \to \cdots P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

es exacta (K_d es el núcleo), K_d es un $A[x]$-modulo que es A-proyectivo.

Lema 1: K un $A[x]$-mod que es A-proy $\Rightarrow pdim_{A[x]} K \leq 1$.

consideramos

$$0 \to A[x] \otimes_A K \longrightarrow A[x] \otimes_A K \longrightarrow K \to 0$$

con diferenciales

$$ax^n \otimes k \mapsto ax^n \otimes k - ax^{n-1} \otimes x \cdot k$$

$$ax^n \otimes k \mapsto ax^n \cdot k$$

Aff: es una s. exacta. La afirmacion concluye el lema, y el lema muestra $pdim_{A[x]} M \leq d+1$ via

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A[x] \underset{A}{\otimes} K_d \arrow[r] & A[x] \underset{A}{\otimes} K_d \arrow[rr, dotted] \arrow[dr] & & P_{d-1} \arrow[r] & \cdots P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & K_d \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Lema 2: $x \in B$ central y no divisor de cero en B (e.g. $x \in B = A[x]$).
Si $0 \neq M$ es un $B/(x)$-módulo con $pdim_B(M) < \infty$ entonces

$$\boxed{pdim_B(M) = pdim_{B/(x)}(M) + 1}$$

dem: **Inducción, caso 0.** Si $M = B/(x)$, no puede ser B-proyectivo porque tiene x-torsión, y
$0 \to B \to^x B \to B/(x) \to 0$ muestra

$$pdim_B(M) = 1 = 0 + 1$$

Si M es $B/(x)$-libre, similar, y si es $B/(x)$-proyectivo $pdim_B M \leq 1$ y M no puede se B proyectivo porque tiene x-torsión.

dem: **paso inductivo:** Si M no es $B/(x)$ proy, $pdim_{B/(x)} M = d > 0$, tomamos una s.e.c. de $B/(x)$-mod

$$0 \to K \to P \to M \to 0$$

Aff: $\Rightarrow pdim_{B/(x)} K = d - 1$, pues $\forall X \in B/(x)$-Mod y $\forall n \geq 1$

$$\mathrm{Ext}^n_{B/(x)}(P,X) \to \mathrm{Ext}^n_{B/(x)}(K,X) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_{B/(x)}(M,X) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_{B/(x)}(P,X)$$

$(\Rightarrow \mathrm{Ext}^n_{B/(x)}(K,X) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_{B/(x)}(M,X)\ )$
$\Rightarrow$ inductivamente tenemos la fórmula para K:

$$pdim_B(K) = pdim_{B/(x)}(K) + 1$$

y además $pdim_B(P) = 1$, luego, $\forall n \geq 2$ y $\forall N \in B$-Mod

$$\mathrm{Ext}^n_B(P,N) \to \mathrm{Ext}^n_B(K,N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_B(M,N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_B(P,N)$$

$$(n \geq 2) \Rightarrow \boxed{\mathrm{Ext}^n_B(K,N) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_B(M,N)}$$

$\Rightarrow$ para $n = d$ hay un N donde $\mathrm{Ext}^{d+1}_B(M,N) \neq 0$,
y para $n > d$, $\mathrm{Ext}^{n+1}_B(M,N) = 0 \forall N$

O sea, $\boxed{pdim_B(K) = pdim_B(M) - 1}$

(además de la misma fórmula con $pdim_{B/(x)}$)

Si $d = 1$ (K es $B/(x)$-proy) $\Rightarrow$????

$\mathrm{Ext}^1_B(K,N) \to \mathrm{Ext}^2_B(M,N) \to 0$ y
$\mathrm{Ext}^n_B(K,N) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_B(M,N)$ $\forall n \geq 2$
y concluimos $pdim_B(M) \leq 2 = 1 + 1$.
Queremos ver que no puede ser $pdim_B(M) = 1$.

Suponemos $pdim_{B/(x)}M = 1$ y $pdim_B(M) = 1$ (en vez de 2)

Tomamos una s.e.c. en B-mod (no en $B/(x)$-mod)

$$0 \to R \to F \to M \to 0$$

con $F \in B$-mod proy. Si $pdim_B(M) = 1 \Rightarrow$ es B proy.

Como $B/(x) \otimes_B -$ manda B-proy. en $B/(x)$-proy. tenemos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^B(B/(x), M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^B(B/(x), M) \arrow[r] & B/(x) \underset{B}{\otimes} R \arrow[r] & B/(x) \underset{B}{\otimes} F \arrow[r] & B/(x) \underset{B}{\otimes} M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$pdim_{B/(x)}(M) = 1 \Rightarrow \mathrm{Tor}_1^B(B/(x), M)$ es $B/(x)$-proy. Pero..

$\mathrm{Tor}_1^B(B/(x), M) \cong M^x = \{m \in M : xm = 0\} = M$, NO es $B/(x)$ proy.

Ahora simplemente usamos que

$$pdim_{B/(x)}K = pdim_{B/(x)}M - 1$$

$$pdim_B K = pdim_B M - 1$$

y que la fórmula vale para K:

$$pdim_B K = pdim_{B/(x)}K + 1$$

luego, sumando 1 en ambos miembros y concluimos.

$$\boxed{pdim_B M = pdim_{B/(x)}M + 1}$$

$\square$