El cono de un morfismo: $f : M \to N$

$$Co(f) = N \oplus_f \Sigma M$$

$$Co(f)_n = N_n \oplus M_{n-1}$$

$$\partial(x, m) = (dx + fm, -dm)$$

$$0 \to N \to Co(f) \to \Sigma M \to 0$$

Lema de la serpiente, s.e.c. s.e.l. : $0 \to X \to Y \to Z \to 0 \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
\rightsquigarrow & H_n(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & H_n(Y) \arrow[r, "p"] \arrow[d] & H_n(Z) \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend left=60] & \\
 & \frac{X_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{d}_X"] & \frac{Y_n}{d(Y_{n+1})} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\overline{d}_Y"] & \frac{Z_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}_Z"] \arrow[dl, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend right=60] & Z_{n-1}(Y) \arrow[r, "p"] \arrow[d] \arrow[l, dotted] & Z_{n-1}(X) \arrow[d] & \\
 & H_{n-1}(X) \arrow[r, "i"] & H_{n-1}(Y) \arrow[r, "p"] & H_{n-1}(Z) &
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$

$$
\begin{tikzcd}
 & H_n(N) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(Co(f)) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(M) \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend left=60] & \\
 & \frac{N_n}{d(N_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{N_n \oplus M_{n-1}}{d(Co(f)_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{M_{n-1}}{d(N_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(N) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend right=60] & Z_{n-1}(Co(f)) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, dotted, bend left] & Z_{n-2}(M) \arrow[d] & \\
 & H_{n-1}(N) \arrow[r] & H_{n-1}(Co(f)) \arrow[r] & H_{n-2}(M) &
\end{tikzcd}
$$

Propiedad: $f : M \to N$ es q-is $\iff H_\bullet(Co(f)) = 0$

Dem: $0 \to N \to Co(f) \to \Sigma M \to 0 \rightsquigarrow$

$$H_{n+1}(N) \to H_{n+1}(Co(f)) \to H_{n+1}(\Sigma M) \xrightarrow{[f]} H_n(N) \to H_n(Co(f))$$

Homotopía en $\mathrm{Chain}(A)$:

$f \sim g \iff \exists h$ A-lineal t-.q. $f - g = dh + hd$

Aplicación: si $f, g : M \to N$ y $m \in M$ es tal que $dm = 0$

$$\Rightarrow f(m) - g(m) = d(hm) + h(dm) = d(hm) + 0$$

por lo tanto

$$[f(m)] = [g(m)] \; MOD \; Im(d)$$

es decir,

$$[f] = [g] : H_\bullet(M) \to H_\bullet(N)$$

Observación: $H_\bullet M \cong H_\bullet N$ no significa que M y N deban ser homotópicamente equivalentes. Por ejemplo

$$P: \ \cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \ \to 0 \to \dots$$

$$M: \ \cdots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0 \to \dots$$

tienen misma homología, pero $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(\mathbb{Z})}(M, P) = 0$!

Sin embargo, existe $f : P \to M$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2"] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

que induce un isomorfismo en homología.
Si queremos calcular homología, queremos complejos a menos de q-is, que es más débil que a menos de homotopía.

Ejemplo

Si en $(M_\bullet, d)$ $\exists h$ t.q. $hd + dh = \mathrm{id}_M$
$\Rightarrow H_\bullet(M) = 0$

Nombre: $H_\bullet(M) = 0$=acíclico,
$hd + dh = \mathrm{id}_M$= contráctil

Ejemplos:

$0 \to X \to Y \to 0$ contráctil o acícilo es lo mismo

$0 \to X \to Y \to Z \to 0$
Homologia cero = exactitud, contráctil = se parte

Equivalencia Homotópica:

$M \cong_{\mathcal{H}} N \iff \exists\ M \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} N$ morfismos de complejos t.q.

$$f \circ g \sim Id_N, \qquad g \circ f \sim Id_M$$

En particular

$$H_\bullet M \cong H_\bullet N$$

En otras palabras, $M \cong N$ en $\mathcal{H}(A) = \mathrm{Chain}(A)/\sim$,

y el funtor $H_\bullet : \mathrm{Chain}(A) \to {}^{\mathbb{Z}}_{A}Mod$
se factoriza por $\mathcal{H}(A)$

Supongamos

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

una s.e.c. en A-Mod, y $F : A\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$. Es

$$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$$

una s.e.c.?

Supongamos $F(f + f') = F(f) + F(f')$, luego $F(0) = 0$,

$$\Rightarrow \qquad 0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$$

es un complejo! Cuanto vale su homología?

Observación: Si $(M_\bullet, d)$ es contráctil, con homotopía h y F es aditivo, entonces $(F(M)_\bullet, F(d))$ es contractil con homotopia $F(h)$, pues

$$d_{FM}F(h) + F(h)d_{FM} = F(d_M)F(h) + F(h)F(d_M)$$

$$= F(d_M h) + F(hd_M) = F(d_M h + hd_M) = F(Id_M) = Id_{FM}$$

Funtores derivados: Estrategia

Reemplazar $M \in {}_A Mod$ por un complejo mejor comportado (resoluciones proyectivas) $M \rightsquigarrow$

$$\cdots P_{n+1} \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

exacto, con P_n proyectivo$\forall n \geq 0$.
Tenemos un morfismo de complejos, que es un q-is

$$\begin{tikzcd}
(P_\bullet, d) & \cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Reemplazar M por $P_\bullet$, y aplicar F en P, en vez de en M.
Se define

$$L_n F(M) := H_n(F(P_\bullet))$$

Funtorialidad? Si $f_M \to N$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Buena definición (1)?

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] \arrow[dl, dotted] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dl, dotted] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] \arrow[dl, dotted] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] \arrow[dl, dotted] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Buena definición (2)?

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots \to & P_{n+1} & \to & P_n & \to \cdots \to & P_1 & \to & P_0 & \to & M & \to & 0 \\
& \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow \mathrm{id} & & \\
\cdots \to & Q_{n+1} & \to & Q_n & \to \cdots \to & Q_1 & \to & Q_0 & \to & M & \to & 0 \\
& \downarrow g_{n+1} & & \downarrow g_n & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 & & \downarrow \mathrm{id} & & \\
\cdots \to & P_{n+1} & \to & P_n & \to \cdots \to & P_1 & \to & P_0 & \to & M & \to & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots \to & P_{n+1} & \to & P_n & \to \cdots \to & P_1 & \to & P_0 & \to & M & \to & 0 \\
& g_{n+1}f_{n+1} \downarrow & & \downarrow g_n f_n & & \downarrow g_1 f_1 & & \downarrow g_0 f_0 & & \downarrow \mathrm{id} & & \\
\cdots \to & P_{n+1} & \to & P_n & \to \cdots \to & P_1 & \to & P_0 & \to & M & \to & 0
\end{array}$$

$\Rightarrow gf \sim Id_{P_\bullet}$.

Concluimos, $P_\bullet = P(M)$ bien definido a menos de equivalencia homotópica (i.e. a menos de iso en $\mathcal{H}(A)$), y fijadas resoluciones $P_\bullet$ y $Q_\bullet$ de M y N, está bien definido

$$f : M \to N \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P_\bullet, Q_\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(P, Q)/\sim$$

Prop: Si F es exacto a derecha, entonces

$$LF_0(M) = H_0(F(P_\bullet)) \cong F(M)$$

$$L_nF(M) = H_n\Big(\cdots FP_{n+1} \to FP_n \to \cdots \to FP_1 \to FP_0 \to 0 \Big)$$

a partir de $\cdots P_{n+1} \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$
tenemos

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

$+$ F exacto a derecha $\Rightarrow$

$$FP_1 \xrightarrow{F(d_1)} FP_0 \xrightarrow{F(d_0)} FM \longrightarrow 0$$

Entonces $FM \cong \mathrm{Coker}\Big(FP_1 \xrightarrow{F(d_1)} FP_0 \Big) =$

$$H_0\Big(\cdots FP_{n+1} \to FP_n \to \cdots \to FP_1 \to FP_0 \to 0 \Big)$$

$$\boxed{\text{Def: } \mathrm{Tor}_n^A(M,N) = L_n(M \otimes_A -)(N) = H_n(M \otimes_A P_\bullet)}$$