Módulos diferenciales graduados

Un A modulo d.g. es

$$(M, d),\ M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n,$$

$$d : M \to M,\ d^2 = 0,$$

$$d(M_n) \subseteq M_{n-1}\ \ (\mathit{complejo\ de\ cadenas})$$

si $d(M_n) \subseteq M_{n+1}$ se llama complejo de cocadenas

$$\mathit{Notar}:\ \ \widetilde{M}_n := M_{-n}\ \ \mathit{cadenas} \leftrightarrow \mathit{cocadenas}$$

Dibujo:

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{d} M_n \xrightarrow{d} M_{n-1} \xrightarrow{d} \cdots$$

Ejemplo Análisis II

U un abierto de $\mathbb{R}^3$,

$$0 \to C^\infty(U) \xrightarrow{grad} (C^\infty(U))^3 \xrightarrow{rot} (C^\infty(U))^3 \xrightarrow{div} C^\infty(U) \to 0$$

Ejemplo Álgebra

$g \in G$, $g^N = 1$, M un G-módulo,
$tr_g := 1 + g + g^2 + \cdots + g^{N-1}$

$$\cdots \to M \xrightarrow{1-g} M \xrightarrow{tr_g} M \xrightarrow{1-g} M \xrightarrow{tr_g} M \to \cdots$$

(Traza de una extensión cíclica de cuerpos: álgebra 3, Norma$=$ notación multiplicativa)

Ejemplos

$A = B/(x)$, x central,

$$0 \to B \xrightarrow{x.} B \to B/(x) \to 0$$

$A = B/(x, y)$, x, y centrales,

$$0 \to B \longrightarrow B \oplus B \longrightarrow B \to B/(x, y) \to 0$$

$$b \mapsto (yb, -xb),$$

$$(b, c) \mapsto xb + yc$$

$$d^2 = 0 \;\leftrightarrow Im(d) \subseteq \operatorname{Ker} d$$

Un complejo se dice **exacto** si $Im(g) = \operatorname{Ker}(d)$
O exacto en el lugar n

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{d} M_n \xrightarrow{d} M_{n-1} \xrightarrow{d} \cdots$$

si $\operatorname{Ker}(d\colon M_n \to M_{n-1}) = d(M_{+1})$

Nombres:

Z_n=n-ciclos=$\operatorname{Ker}(d\colon M_n \to M_{n-1}) \subseteq M_n$

B_n=n-bordes=$d(M_{n+1}) \subseteq Z_n \subseteq M_n$

$$H_n(M,d) := \frac{Z_n}{B_n}, \quad M \text{ exacto en lugar n} \Leftrightarrow H_n(M) = 0$$

La categoría $\mathrm{Chain}(A)$

(M, d_M) y (N, d_N) complejos,
un **morfismos de complejos** es una $f : M \to N$ A-lineal t.q.

$$f(M_n) \subseteq N_n \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$f \circ d_M = d_N \circ f$$

Z_n, B_n y H_n son funtores.
Límites y colímites: se calculan grado a grado (en particular suma directa y producto). Idem Ker, Coker.
Epi, mono: lugar a lugar.

Obs: A-mod esta incluida en $\mathrm{Chain}(A)$.

Mor(A-mod) también está incluida en $\mathrm{Chain}(A)$:
$\cdots \to 0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0 \to \cdots$

Ejemplo 1: $A[0] = A$ "concentrado en grado cero",

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(A[0], M) \cong Z_0 \subseteq M_0$$
$$f \mapsto f(1)$$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\arrow[r] & M_1 \arrow[r, "d"] & M_0 \arrow[r, "d"] & M_{-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(A[0], -) \cong Z_0(-)$ no es exacto

Ejemplo 2: $\mathbf{P}_0 = A$, $\mathbf{P}_1 = A$, $d = \mathrm{id}_A$.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{P}, d) & \cdots 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "f_0"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
(M, d) & \cdots \arrow[r] M_1 \arrow[r, "d"] & M_0 \arrow[r, "d"] & M_{-1} \arrow[r] & M_{-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(\mathbf{P}, M) &\cong M_0 \\ (f_0, f_1) &\mapsto f_0(1) \end{aligned}$$

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(\mathbf{P}, -)$ es exacto! $\therefore$ $\mathbf{P}$ es proyectivo en $\mathrm{Chain}(A)$

Lema de la serpiente

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' &
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ morfismo δ

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}(a) \arrow[r, "f|"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(b) \arrow[r, "g|"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(c) \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend left] & \\
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "c"] \arrow[l, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend right] & Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] \arrow[l, dotted, bend left] & Z' \arrow[d] & \\
 & Coker(a) \arrow[r, "\overline{f'}"] & Coker(b) \arrow[r, "\overline{g'}"] & Coker(c) &
\end{tikzcd}$$

y

$$\mathrm{Ker}(a) \to \mathrm{Ker}(b) \to \mathrm{Ker}(c) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(a) \to \mathrm{Coker}(b) \to \mathrm{Coker}(c)$$

es exacta