$\dim_k A = n$, $m : A \otimes A \to A$,

$$m \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes A, A) \cong (k^2 \otimes k^n)^* \otimes k^n \cong k^{n^3}$$

Si $\{x_i, \ldots, x_n\}$ es base,

$$m(x_i \otimes x_j) = x_i x_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$$

$$\therefore m = \sum_{i,j} c_{ik}^k x^i \otimes x^j \otimes x_k \in (k^n)^* \otimes (k^n)^* \otimes k^n$$

m asociativa $\iff$ los c_{ij}^k verfican ciertas ecuaciones.
"las álgebras de dimensión $n \leftrightarrow$ un subconjunto de k^{n^3} que satisface unas ecuaciones"

Sea $k = \mathbb{R}$, y $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^3}$ / $\gamma(0) = m$, y $\gamma(t) = m_t$ es una multiplicación asociativa en $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \gamma'(0)$=un vector tangente a "las álgebras de $\mathbb{R}^n$ en el punto $A = (\mathbb{R}^n, m)$

Todos los posibles $\gamma'(0)$ forman el espacio tg

Obs: si $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^3}$ verificando

- $\widetilde{\gamma}(0) = \gamma(0) = m$,
- $\widetilde{\gamma}'(0) = \gamma'(0)$,

$\not\Rightarrow \widetilde{\gamma}(t) = \widetilde{m}_t$ sea asociativa, pero Taylor de orden 1 alrededor de 0 de m y de $\widetilde{m}$ coinciden, y $\gamma'(0) = \widetilde{\gamma}'(0)$

$\boxed{\therefore \text{ considero } \widetilde{\gamma}(t) = m_t := m + tf \text{ donde } f : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}$

$\boxed{\text{y verifico asociatividad a menos de } O(t^2)}$

Notación:

$$a \cdot_t b = m_t(a \otimes b) = (m + tf)(a \otimes b) = ab + tf(a \otimes b)$$

quiero que

$$\boxed{(a \cdot_t b) \cdot_t c = a \cdot_t (b \cdot_t c) + O(t^2)}$$

$$(a \cdot_t b) \cdot_t c = (ab + tf(a \otimes b)) \cdot_t c$$

$$= (ab)c + tf(ab \otimes c) + t\Big(f(a \otimes b)c + tf(f(a \otimes b) \otimes c)\Big)$$

$$= (ab)c + t\Big(f(ab \otimes c) + f(a \otimes b)c\Big) + O(t^2)$$

$$a \cdot_t (b \cdot_t c) = a \cdot_t (bc + tf(b \otimes c))$$

$$= a(bc) + tf(a \otimes bc) + t\Big(af(b \otimes c) + tf(a \otimes f(b \otimes c))\Big)$$

$$= a(bc) + t\Big(f(a \otimes bc) + af(b \otimes c)\Big) + O(t^2)$$

Concluimos m_t asociativa Mod $t^2 \iff f : A \otimes A \to A$ verifica

$$f(ab \otimes c) + f(a \otimes b)c = f(a \otimes bc) + af(b \otimes c)$$

$\iff$

$$\partial(f)(a \otimes b \otimes c) = af(b \otimes c) - f(ab \otimes c) + f(a \otimes bc) - f(a \otimes b)c = 0$$

¿Qué estamos haciendo?

A una k-algebra entonces $A \otimes_k k[t]/(t^2)$ es una $k[t]$-álgebra.

$$A \otimes_k k[t]/(t^2) = A[t]/(t^2) = A \oplus At$$

$$(a + tb)(c + td) = ac + t(ad + bc)$$

pero, cuáles son las estructuras de $k[t]/(t^2)$-álgebra (o sea t central y $t^2 = 0$) en $A \oplus At$ t. q. coinciden con A módulo t?

O sea,

$$(a + tb) * (c + td) = ac + t(\cdots)$$

Definimos $f : A \otimes_k A \to A$ vía

$$a * c = ac + tf(a \otimes b)$$

Esta f determina $*$:

$$\begin{aligned}
(a+tb)*(c+td) &= a*c+t(a*d+b*c)+t^2(\cdots) \\
&= a*c+t(a*d+b*c) \\
&= ac+tf(a\otimes c)+t(ad+t(..)+bc+t(..)) \\
&= ac+t\Big(f(a\otimes c)+ad+bc\Big)+t^2(..) \\
&= ac+t\Big(f(a\otimes c)+ad+bc\Big)
\end{aligned}$$

Ejercicio / Proposición: son equivalentes

- $* = *_f$ es asociativa $\iff$
- $f(ab\otimes c)+f(a\otimes b)c = f(a\otimes bc)+af(b\otimes c)$ $\forall a,b,c\in A$
- $\partial(f)=0$ donde ∂ es el borde de Hochschild.

Generalización:Sea A una k-álgebra y supongamos

$$p : B \to A$$

un **epimorfismo** de k-álgebras con $M := \mathrm{Ker} p$ de cuadrado cero $(mm' = 0 \forall m, m' \in \mathrm{Ker} p)$

Obs: $M^2 = 0 \Rightarrow bm = (b + m')m$ y $mb = m(b + m')$. Luego M es un B-bimódulo que es un $B/M = A$-bimódulo.

Supondremos que o bien k es cuerpo, o bien la sucesión

$$0 \to M \to B \to A \to 0$$

se parte como sucesión de k-módulos

Luego

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal, "\cong"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[l, bend right, dotted, "s"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_1"] & M \oplus A \arrow[r, "p_2"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En $M \oplus A$ la inclusión de M es como ideal de cuadrado cero, la proyección en A es de k-álgebras. Luego

$$(m, 0) * (m', 0) = 0$$

$$(0, a) * (0, a') = (??, aa')$$

y M es B-sub-bimódulo:

$$(m, 0) * (m', a) = (..., 0)$$

$$(m', a) * (m, 0) = (..., 0)$$

Más aún, sabemos que M es A-bimódulo vía

$$am = s(a) * m,$$

$$ma = m * s(a)$$

Luego

$$(m, 0) * (m', a) = (m, 0) * (m', 0) + (m, 0) * (0, a) = 0 + (ma, 0)$$

y similarmente

$$(m', a) * (m, 0) = (am, 0)$$

De qué depende $*$? si definimos $f : A \otimes A \to M$ vía

$$(0, a) * (0, a') = (f(a \otimes a'), aa')$$

entonces $*$ queda en términos de f:

$$(m, a) * (m', a') = (ma' + am' + f(a \otimes a'), aa')$$

Ejercicio / Proposición: Sea $f : A \otimes A \to M$, son equivalentes

- $* = *_f$ es un producto asociativo en$B = M \oplus A$,
- $f(ab \otimes c) + f(a \otimes b)c = f(a \otimes bc) + af(b \otimes c)$ $\forall a, b, c \in A$
- $\partial(f) = 0$ donde ∂ es el borde de Hochschild en $C^2(A, M)$.

Teo:

Sean $f_1, f_2 : A \otimes A \to M$. Entonces $\exists$ un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & (M \oplus A, *_{f_1}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & (M \oplus A, *_{f_2}) \arrow[r, "p"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

si y sólo si existe $D : A \to M$ k-lineal tal que $f_1 - f_2 = \partial(D)$.
En consecuencia, existe una biyección

$$H^2(A, M) \leftrightarrow \text{ clases de } (0 \to M \to B \to A \to 0)$$

que se parten como k-módulos donde B es k-álgebra,
$B \to A$ es epi de k-álgebras,
y M es un ideal de cuadrado cero.

dem: si el diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & (M \oplus A, *_{f_1}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & (M \oplus A, *_{f_2}) \arrow[r, "p"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

entonces $\phi(m, 0) = (m, 0)$ y $\phi(0, a) = (??, a)$. Definimos $D : A \to M$ vía

$$\phi(0, a) = (D(a), a)$$

D es claramente k-lineal. ϕ es multiplicativa si y sólo si (ejercicio ver que es suficiente)

$$\phi((0, a) *_1 (0, a')) = \phi(0, a) *_2 \phi(0, a')$$

$$\phi((0,a) *_1 (0,a')) = \phi(0,a) *_2 \phi(0,a')?$$

$$\phi((0,a) *_1 (0,a')) = \phi(f_1(a \otimes a'), aa') = (f_1(a \otimes a') + D(aa'), aa')$$

$$\begin{aligned} \phi(0,a) *_2 \phi(0,a') &= (D(a),a) *_2 (D(a'),a') \\ &= (D(a)a' + aD(a') + f_2(a \otimes a'), aa') \end{aligned}$$

ambas expresiones son iguales $\iff$

$$f_1(a \otimes a') + D(aa') = D(a)a' + aD(a') + f_2(a \otimes a')$$

$\iff f_1 - f_2 = \partial(D)$ $\square$