Posets, supremo

Sea P un poset, $I \subseteq P$.
recordamos $sup(I)$ (en P):

- $c \in P$ es cota superior I si $i \leq c, \forall i \in I$.
- s_0 es un **supremo** para I si es "la mejor cota superior", i.e.
  - s_0 es cota superior de I, y
  - para toda cota superior c, tenemos que $s_0 \leq c$.
    (en particular toda cota superior es comparable a s_0.
    O sea, no es lo mismo supremo que maximal)

Obs: si existe, el supremo es único: si s_0 e s_1 son supremos, entonces $s_0 \leq s_1$ (s_0 cota, s_1 sup)
y tambien $s_1 \leq s_0$ (s_1 cota, s_0 sup)
$\Rightarrow s_0 = s_1$ porque $\leq$ es de orden.

Colímite categórico

$\mathcal{C}$ una categoría, $(I, \leq)$ un poset, y tomamos "un diagrama" en $\mathcal{C}$ indexado por I. Es decir, damos los siguientes datos:

- $X_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ para cada $i \in I$.
- para cada $i \leq j$ una flecha $\iota_{ij} : X_i \to X_j$ compatible con el orden:
  - $\iota_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$
  - Si $i \leq j \leq k$, luego $i \leq k$. Pedimos $\iota_{ik} = \iota_{jk}\iota_{ij}$

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_{ij}"] \arrow[rr, bend right, "\iota_{ik}"'] & X_j \arrow[r, "\iota_{jk}"] & X_k \end{tikzcd}$$

(i.e. hemos etiquetado el diagrama de Hasse de I, con objetos en los vértices y morfismos en las flechas)

Se llama un **sistema directo**.

Límite categórico

Ejemplo 1) $I = \{a, b\}$, donde a y b no son comparables. Un diagrama indexado por I es simplemente dos objetos

$I : \bullet \qquad \bullet$ diagrama: $X \qquad Y$

Ejemplo 2) $I = \{1 < 2\}$

$I :\ 1 \to 2,$ diagrama: $X \xrightarrow{f} Y$

Ejemplo 3) $I = \{a \geq b \leq c\}$. Un diagrama son dos flechas con mismo dominio:

$$I : \begin{tikzcd} b \arrow[r] \arrow[d] & a \\ c & \end{tikzcd} \qquad \text{diagrama:} \quad \begin{tikzcd} X_b \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X_a \\ X_c & \end{tikzcd}$$

Colímite categórico

Dado $\{X_i \xrightarrow{\iota_{ij}} X_j\}_{i \leq j}$ un diagrama en $\mathcal{C}$ idexado por un poset I,

un colímite (o límite directo) en $\mathcal{C}$ de ese diagrama,

denotado $\varinjlim_{I} X_i$ (o $\varinjlim_{I}^{\mathcal{C}} X_i$) es un objeto en $\mathcal{C}$ que es un "supremo" del diagrama (o sistema directo), i.e.

Colímite categórico

Un objeto X junto a morfismos $\iota_i : X_i \to X\ \forall i \in I$ tal que $\forall i \leq j$, el diagrama sgte conmuta *(cota superior)*, y

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "\iota_{ij}"'] & X \\
X_j \arrow[ur, "\iota_j"'] &
\end{tikzcd}$$

(la mejor cota) Si $f_i : X_i \to Y$ es otra flia de flechas como antes, entonces X es "mejor"

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "\iota_{ij}"'] \arrow[rr, bend left, "f_i"] & X \arrow[r, dotted, "\exists! f"] & Y \\
X_j \arrow[ur, "\iota_j"'] \arrow[urr, bend right, "f_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Límite categórico

Obs: Si $(I, \leq)$ tiene máximo m_0, entonces X_{m_0} es el colímite del diagrama. La gracia es cuando no hay máximo en I..

Límite categórico: producto directo

Ejemplo 1: $I = \{a, b\}$, donde a y b no son comparables.

$$
\begin{tikzcd}
\bullet a & & \bullet a \arrow[dr] & \\
& \rightsquigarrow & & \bullet s_0 \\
\bullet b & & \bullet b \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

diagrama: $\bullet_a X$ colímite$=(Z, \iota_a, \iota_b)$ $\forall Z', f, g$

$\bullet_b Y$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\iota_a"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& Z \arrow[r, dotted, "\exists !"] & Z' \\
Y \arrow[ur, "\iota_b"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$Z := X \coprod Y$ se llama un **coproducto** categórico de X e Y.

Límite categórico

Ejemplo 2:

$1 \to 2$,

$f : X \to Y$,

el colímite es simplemente Y, pues es 2 es máximo.

Las flechas son $f : X \to Y$ e $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$.

Colímite categórico

Ejemplo 3:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet & & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d, dotted] \\ \bullet & \bullet \arrow[r, phantom, "\rightsquigarrow"] & & \bullet \arrow[r, dotted] & \circ \end{tikzcd}$$

Colímite categórico

Ejemplo 3: $$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d, dotted] \\ \bullet \arrow[r, dotted] & \circ \end{tikzcd}$$

Dado $$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

el **cuadrado (co)cartesiano** o push-out es

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "a"] & \\ Y \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "b"'] & X \coprod_Z Y \arrow[dr, dotted, "\exists!"] & \\ & & W \end{tikzcd}$$

Ejemplos

- En grupos abelianos, o módulos, el coproducto es la suma directa.
- En Sets, el coproducto es la unión disjunta.
- Notar que fijado A un anillo, el funtor $L : Sets \to A - mod$ dado por

$$L(X) = A^{(X)}$$

(que a X le asigna el A-módulo libre en X)
manda coproducto (en Sets) en coproducto (en A-mod)

* En Grupos (no necesariamente abelianos) el coproducto es el producto libre.
* en anillos **conmutativos** el coproducto es el producto tensorial sobre $\mathbb{Z}$