

# Posets, supremo

Sea  $P$  un poset,  $I \subseteq P$ .

recordamos  $\sup(I)$  (en  $P$ ):

- ▶  $c \in P$  es cota superior  $I$  si  $i \leq c, \forall i \in I$ .
- ▶  $s_0$  es un **supremo** para  $I$  si es “la mejor cota superior”, i.e.
  - $s_0$  es cota superior de  $I$ , y
  - para toda cota superior  $c$ , tenemos que  $s_0 \leq c$ .  
(en particular toda cota superior es comparable a  $s_0$ .  
O sea, no es lo mismo supremo que maximal)

Obs: si existe, el supremo es único: si  $s_0$  e  $s_1$  son supremos,

entonces  $s_0 \leq s_1$  ( $s_0$  cota,  $s_1$  sup)

y también  $s_1 \leq s_0$  ( $s_1$  cota,  $s_0$  sup)

$\Rightarrow s_0 = s_1$  porque  $\leq$  es de orden.



# Límite categórico

**Ejemplo 1)**  $I = \{a, b\}$ , donde  $a$  y  $b$  no son comparables.  
Un diagrama indexado por  $I$  es simplemente dos objetos

$I : \bullet \quad \bullet$                       diagrama:  $X \quad Y$

**Ejemplo 2)**  $I = \{1 < 2\}$

$I : 1 \rightarrow 2,$                       diagrama:  $X \xrightarrow{f} Y$

**Ejemplo 3)**  $I = \{a \geq b \leq c\}$ . Un diagrama son dos flechas con mismo dominio:

$I : b \longrightarrow a$   
          ↓  
           $c$

diagrama:  $X_b \xrightarrow{f} X_a$   
              ↓  
               $g$   
               $X_c$

# Colímite categórico

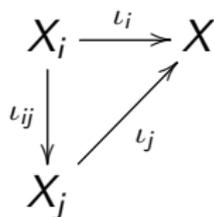
Dado  $\{X_i \xrightarrow{t_{ij}} X_j\}_{i \leq j}$  un diagrama en  $\mathcal{C}$  indexado por un poset  $I$ ,

**un colímite** (o límite directo) en  $\mathcal{C}$  de ese diagrama,

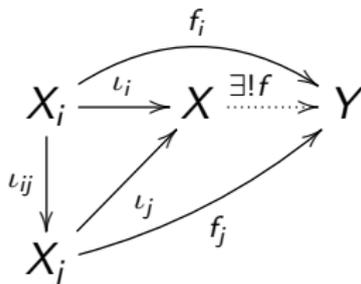
denotado  $\lim_{\rightarrow I} X_i$  (o  $\lim^{\mathcal{C}}_{\rightarrow I} X_i$ ) es un objeto en  $\mathcal{C}$  que es un “supremo” del diagrama (o sistema directo), i.e.

# Colímite categórico

Un objeto  $X$  junto a morfismos  $\iota_i : X_i \rightarrow X \ \forall i \in I$   
tal que  $\forall i \leq j$ , el diagrama sgte conmuta (*cota superior*), y



(*la mejor cota*) Si  $f_i : X_i \rightarrow Y$  es otra flia de flechas como antes, entonces  $X$  es “mejor”

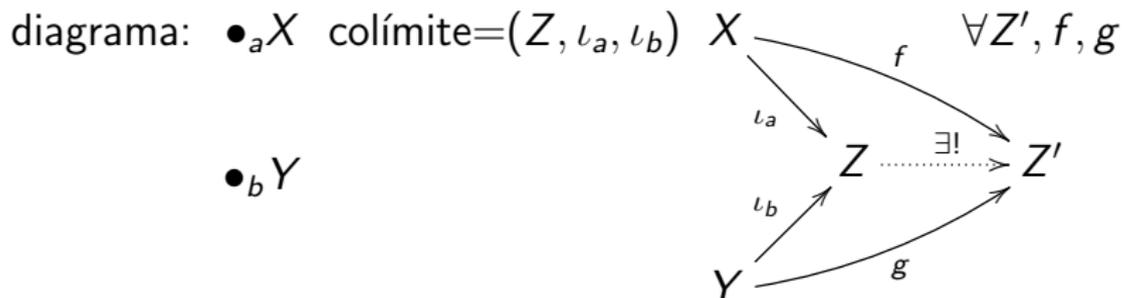
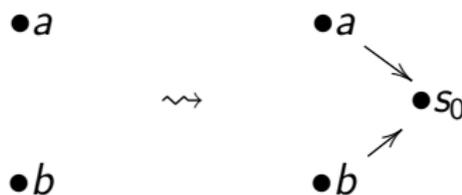


# Límite categórico

Obs: Si  $(I, \leq)$  tiene máximo  $m_0$ , entonces  $X_{m_0}$  es el colímite del diagrama. La gracia es cuando no hay máximo en  $I$ .

# Límite categórico: producto directo

Ejemplo 1:  $I = \{a, b\}$ , donde  $a$  y  $b$  no son comparables.



$Z := X \amalg Y$  se llama un **coproducto** categórico de  $X$  e  $Y$ .

# Límite categórico

Ejemplo 2:

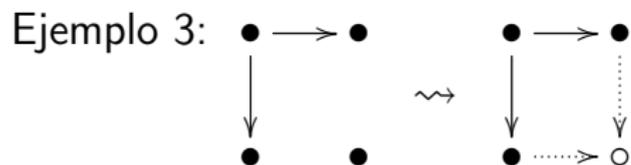
$$1 \rightarrow 2,$$

$$f : X \rightarrow Y,$$

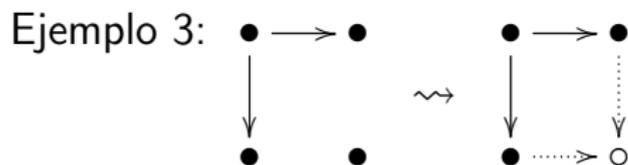
el colímite es simplemente  $Y$ , pues es 2 es máximo.

Las flechas son  $f : X \rightarrow Y$  e  $\text{id}_Y : Y \rightarrow Y$ .

# Colímite categórico



# Colímite categórico



Dado  $Z \xrightarrow{f} X$   
 $g \downarrow$   
 $Y$

el **cuadrado (co)cartesiano** o push-out es

$Z \xrightarrow{f} X$   
 $g \downarrow$   
 $Y \rightarrow X \amalg_Z Y$

$a$   
 $\exists!$   
 $b$   
 $W$

# Ejemplos

- ▶ En grupos abelianos, o módulos, el coproducto es la suma directa.
- ▶ En Sets, el coproducto es la unión disjunta.
- ▶ Notar que fijado  $A$  un anillo, el funtor  $L : \text{Sets} \rightarrow A\text{-mod}$  dado por

$$L(X) = A^{(X)}$$

(que a  $X$  le asigna el  $A$ -módulo libre en  $X$ )  
manda coproducto (en Sets) en coproducto (en  $A\text{-mod}$ )

- \* En Grupos (no necesariamente abelianos) el coproducto es el producto libre.
- \* en anillos **conmutativos** el coproducto es el producto tensorial sobre  $\mathbb{Z}$