Aplicaciones de funtores:

1) Los funtores mandan isos en isos.

Luego, si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, es un funtor, $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y

si FX NO es isomorfo a FY en $\mathcal{D}$,

ENTONCES X NO puede ser isomorfo a Y en $\mathcal{C}$.

Ejemplo: "componentes conexas":Top $\to$ Sets,
π_1...

Aplicaciones de funtores:

2) Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor y $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ es un monoide con la composición.

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FXF, X)$$

es un morfismo de monoides.
3) si $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ denota las unidades del monoide $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ (o sea, los isomorfismos de X en X), entonces F induce (por restricción) un morfismo de grupos

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(FX)$$

Comparacion de funtores

Si $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son dos funtores, una **transformacion natural** entre ellos es dar, para cada objeto X, un morfismo

$$\eta_X : FX \to GX$$

compatible con los morfismos. Es decir, tal que para toda $f : X \to Y$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"] & GX \arrow[d, "G(f)"] \\ FY \arrow[r, "\eta_Y"] & GY \end{tikzcd}$$

Comparacion de funtores

Ejemplo famoso: $i_V : V \to V^{**}$

$$v \mapsto ev_v$$

Comparacion de funtores

Ejemplo Hom: Si A es un anillo,

$$M \cong \mathrm{Hom}_A(A, M)$$

$$m \mapsto \phi_m\Big(a \mapsto am\Big)$$

$$\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$$

$$\phi \mapsto \phi(1)$$

Da una transformacion natural (que es un ISOMORFISMO) entre los funtores Id y $\mathrm{Hom}_A(A, -)$

Comparacion de funtores

Ejemplo Hom: Si A es una k-algebra (e.g. $A = k[x]/x^2$, o $A = k[G]$,...)
entonces

$$\mathrm{Hom}_A(N, M) \subseteq \mathrm{Hom}_k(N, M)$$

es una "inclusion" natural de funtores. Es decir, para cada N fijo, se tiene una trasformacion natural (que en cada objeto es una inclusión

$$i : \mathrm{Hom}_A(N, -) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_k(N, -)$$

Comparacion de funtores: caso particular

Si k es un A-módulo,

$$\mathrm{Hom}_A(k, M) \subseteq \mathrm{Hom}_k(k, M) \cong M$$

“Hom modela funtores que son subobjetos”

Por ejemplo, si G es un grupo que actua linealmente en un espacio vectorial V, entonces V es un $k[G]$ módulo y

$$\{v \in V : g(v) = v \ \forall g \in G\} =: V^G \cong \mathrm{Hom}_{k[G]}(k, V)$$

donde se toma la estructura trivial en k ($g \cdot \lambda = \lambda$, $\lambda \in k$)

Comparacion de funtores: caso particular

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_k(k, V) \\ V^G \arrow[u, hook] \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{k[G]}(k, V) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Comparacion de funtores: otro ejemplo

$\mathbb{Z}$ es el grupo libre en 1 elemento, esto dice

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}, G) \cong G$$

$$\phi \mapsto \phi(1)$$

Dado G, el conjunto "$G''_{(2)} = \{g \in G : g^2 = 1\}$, se puede modelar via

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_2, G) \cong \text{"}G''_{(2)}$$

$$\phi \mapsto \phi(1)$$

lo que muestra la naturaleza funtorial de este subconjunto asociado a G...

(aquí

Comparacion de funtores: ejemplos

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, G) \subseteq G \times G$$
$$\phi \mapsto (\phi(1,0), \phi(0,1))$$

$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, G)$="pares de elementos que conmutan".

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3, G) \cong \{(a,b) : a, b \in G, a^2 = 1, b^3 = 1, ab = ba\}$$

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3, G) \cong \{(a,b) : a, b \in G, a^2 = 1, b^3 = 1\}$$

Pregunta general:

en la categoria de A-modulos, si $F : A\text{-mod} \to \mathcal{C}$, y

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

(por ejemplo, si $Y = A^n$, esto da una presentacion de Z por n generadores, y las relaciones "X")

ENTONCES,

¿qué onda la relación entre $F(X)$, $F(Y)$ y $F(Z)$?
empezaremos (durante meses...) con funtores Hom