Bimódulos

k anillo conmutativo, A una k-álgebra. Estudiaremos la categoría de A-bimódulos k-simétricos.

Def: un A-bimódulo M se dice k simétrico si $\lambda m = m\lambda \ \forall \lambda \in k$

Notar que la definición de k-álgebra incluye que A es k-simétrico.

Ejemplo:$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ contiene a $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$. Notar $ij = k = -ji$, luego no es $\mathbb{C}$-simétrico, pues $zj = j\bar{z}$.

$\mathbb{H}$ NO es $\mathbb{C}$-álgebra. Pero SI es $\mathbb{R}$-álgebra.

Teorema/construcción Sea $A^e := A \otimes A^{op}$
La categoría de A-bimódulos k simétricos es isomorfa a la categoría de A^e-mod a izquierda, y también a derecha, via

$$(a \otimes a') \cdot m = ama' = m \cdot (a' \otimes a)$$

OJO: Si M es bimódulo k-simétrico, entonces NO ES un A^e-bimódulo. Es módulo a izquierda (o a derecha, pero no simultáneamente ambos).

$gldim(A)$ y A como bimódulo k-simétrico

Teorema / observación: k cuerpo y A una k-álgebra $\Rightarrow$
$\boxed{gldim(A) \leq pdim_{A^e}(A)}$

dem: Si L es A^e libre, $L \cong (A^e)^{(I)}$ entonces L visto como bimódulo es

$$L \cong A \otimes V \otimes A$$

con $V = k^{(I)}$. En particular, para cualquier $M \in {}_A Mod$

$$L \otimes_A M \cong (A \otimes V \otimes A) \otimes_A M \cong A \otimes V \otimes (A \otimes_A M) \cong A \otimes V \otimes M$$

$$\cong A \otimes (V \otimes M)$$

es A-libre, en particular A-proyectivo.

$\therefore$ P es A^e-proyectivo $\Rightarrow$ $P \otimes_A M$ es proyectivo en A-Mod

$gldim(A)$ y A como bimódulo k-simétrico

Coro: Si $pdim_{A^e} A = d \Rightarrow \exists$

$$0 \to P_d \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

resolución de A por A^e-proyectivos.

En particular son A-proyectivos a derecha $\Rightarrow$ el complejo admite una homotopía A-lineal a derecha $\Rightarrow \forall M \in {}_A Mod$

$$0 \to P_d \otimes_A M \to \cdots \to P_1 \otimes_A M \to P_0 \otimes_A M \to A \otimes_A M \to 0$$

tiene una homotopía k-lineal $\Rightarrow$ es exacta, y como $A \otimes_A M \cong M$ y $P_i \otimes_A M$ es A-proyectivo $\Rightarrow pdim_A(M) \leq d$.
Como $M \in {}_A Mod$ es arbitrario $\Rightarrow \boxed{gldim(A) \leq d}$

Ejemplos:

1) k es un cuerpo, V k esp. vect, $A = TV$ (el álgebra tensorial), $A = kQ$ (el álgebra de caminos de un quiver), son álgebras de dimensón global 1.

$$0 \to TV \otimes V \otimes TV \to TV \otimes TV \to TV \to 0$$

$$1 \otimes v \otimes 1 \mapsto v \otimes 1 - 1 \otimes v$$

Obs:

$$\sum a_i \otimes b_1 \mapsto \sum_i a_1 b_i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum a_i \otimes b_1 = \sum a_i \otimes b_1 - \sum a_i b_1 \otimes 1 = \sum a_i (1 \otimes b_1 - b_i \otimes 1)$$

Además

$$1 \otimes bc - bc \otimes 1 = (1 \otimes b - b \otimes 1)c + b(1 \otimes c - c \otimes 1)$$

veamos que $d : TV \otimes V \otimes TV \to TV \otimes TV$

$$1 \otimes v \otimes 1 \mapsto v \otimes 1 - 1 \otimes v$$

es inyectiva. Sea $x_1, \ldots, x_n$ una base de V. Definimos $h : TV \otimes TV \to TV \otimes V \otimes TV$ como la única TV-libeal a izquierda que verifica

$$h(1 \otimes 1) = 0$$

$$h(1 \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k}) := 1 \otimes x_{i_1} \otimes x_{i_2} \cdots x_{i_k} + x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes x_{i_3} \cdots x_{i_k} + \cdots$$
$$= \sum_{j=i}^{k} x_{i_1} \cdots x_{i_{j-1}} \otimes x_{i_j} \otimes x_{i_{j+1}} \cdots x_{i_k}$$

donde por convención $x_{i_0} = 1 = x_{i_{k+1}}$
Notar que

$$h(1 \otimes x x_{i_1} \cdots x_{i_k}) = 1 \otimes x \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k} + x h(1 \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k})$$

$$h(1 \otimes x x_{i_1} \cdots x_{i_k}) = 1 \otimes x \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k} + x h(1 \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k})$$

Consecuencia:

$$hd(1 \otimes x_i \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k}) = h(x_i \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k}) - h(1 \otimes x_i x_{i_1} \cdots x_{i_k})$$

$$= x_i h(1 \otimes x_{i_2} \cdots x_{i_k}) - h(1 \otimes x_i x_{i_1} \cdots x_{i_k})$$

$$= x_i h(1 \otimes x_{i_2} \cdots x_{i_k}) - 1 \otimes x_i \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k} - x_i h(1 \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k})$$

$$= -1 \otimes x_i \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

$\therefore hd = -\mathrm{Id}$ en una base (como TV-mod a izq)

Ejemplo / Ejercicio: Sea $Q = (Q_0, Q_1)$ un quiver, k un cuerpo, $A = kQ$, llamemos $V := kQ_1$ (que es un kQ_0-bimódulo no simétrico),

$$0 \to A \underset{kQ_0}{\otimes} V \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \to 0$$

con la "misma" fórmula de antes, es una sucesión exacta. Además $A \underset{kQ_0}{\otimes} V \underset{kQ_0}{\otimes} A$ es un sumando directo de $A \otimes V \otimes A$ (como A-bimódulo), idem $A \underset{kQ_0}{\otimes} A$ de $A \otimes A$.

Concluimos que $gldim kQ = 1$.

Notar que si Q no tiene ciclos orientados entonces kQ es una k-álgebra de dimensión finita.

Ejemplo / Ejercicio: (un poco más largo)
Q quiver, $I = \langle Q_1 \rangle$, $A = kQ/(I)^2$.
(notar que $(I)^2$= ideal generado por caminos de longitud 2)
$\Rightarrow$

$$\cdots \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_3 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_2 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_1 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} A \xrightarrow{m} A \to 0$$

donde el diferencial está dado por

$$A \underset{kQ_0}{\otimes} PQ_n \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} PQ_{n-1} \underset{kQ_0}{\otimes} A$$

$$1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_n \otimes 1 \mapsto \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_n \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \otimes \alpha_n$$

es una resolución de A como A^e-módulo.

Si Q no tiene ciclos orientados entonces $gldim(A)$=la longitud del camino más largo posible en Q. Para el quiver

$$1 \to 2 \to \cdots \to n$$

el álgebra kQ/I^2 tiene dimensión global n.

Atención!
Ejemplo: A conmutativo $\Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A,A) \cong \mathrm{Der}_k(A)$.
(dem pronto)

Sea k un cuerpo y $A = k(x)$=el cuerpo de fracciones de $k[x]$.
Como A es cuerpo, $gldim(A) = 0$, pero..

$\mathrm{Der}_k(k(x), k(x)) \neq 0$, luego $0 \neq \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A,A)$ y por lo tanto $pdim_{A^e}(A) \geq 1$ (de hecho, es igual a 1).

Esto muestra que la desigualdad

$$gldim(A) \leq pdim_{A^e}(A)$$

puede ser estricta.