Cosntrucciones Bar y Cobar

Definiremos un funtor B (bar) de la categoría de álgebras aumentadas $\epsilon : A \to k$ en coálgebars d.g.

Fijamos $\epsilon : A \to k$ un morfismo de álgebras (aumentación)

$$A = k1 \oplus \mathrm{Ker}\epsilon = k1 \oplus \overline{A}$$

$\overline{A} = A/k1 \cong \mathrm{Ker}\epsilon.$

$B(A)$ **como coálgebra:** $B(A) := T^c\overline{A}$ la coálgebra tensorial en $\overline{A}$ con la deconcatenación como comultiplicación

$$\Delta(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_i \otimes a_{i+1}|\cdots|a_n \in T^c\overline{A} \otimes T^c\overline{A}$$

esta notación es el origen del nombre “bar”

$$\Delta(a_1|\cdots|a_n)=\sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_i\otimes a_{i+1}|\cdots|a_n \in \bigoplus_{i+j=n}(T^c\overline{A})_i\otimes(T^c\overline{A})_j$$

convención: $a_0 = 1 = a_{n+1}$. Es una coálgebra **graduada**.

Ejemplo: si $a|b|c \in \overline{A}^{\otimes 3} \subset T^c\overline{A}$,

$$\Delta a|b|c = 1 \otimes a|b|c + a \otimes b|c + a|b \otimes c + a|b|c \otimes 1$$

Hecho: Si consideramos la graduación $deg\overline{A} = 1$, entonces

$$b'(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_i a_{i+1}|\cdots|a_n, \qquad b'(a) = 0$$

es una super co-derivación.
(Notar $a_i, a_{i+1} \in \mathrm{Ker}\epsilon \Rightarrow a_i a_{i+1} \in \mathrm{Ker}\epsilon \Rightarrow b'$ bien definida

Ejemplo si $a|b|c \in \overline{A}^{\otimes 3} \subset T^c\overline{A}$,

$$(b' \otimes 1 \pm 1 \otimes b')\Delta(a|b|c)$$

$$= (b' \otimes 1 \pm 1 \otimes b')\Big(1 \otimes a|b|c + a \otimes b|c + a|b \otimes c + a|b|c \otimes 1\Big)$$

$$= b'(1) \otimes a|b|c + b'(a) \otimes b|c + b'(a|b) \otimes c + b'(a|b|c) \otimes 1$$

$$+1 \otimes b'(a|b|c) - a \otimes b'(b|c) + a|b \otimes b'(c) - a|b|c \otimes b'(1)$$

$$= +ab \otimes c + ab|c \otimes 1 - a|bc \otimes 1$$

$$+1 \otimes ab|c - 1 \otimes a|bc - a \otimes bc$$

$$\Delta(b'(a|b|c)) = \Delta(ab|c) - \Delta(a|bc)$$

$$= ab|c \otimes 1 + ab \otimes c + 1 \otimes ab|c - a|bc \otimes 1 - a \otimes bc - 1 \otimes a|bc$$

Hecho: $H_\bullet(T^c\overline{A}, b') = \mathrm{Tor}_\bullet^A(k,k)$, luego $\mathrm{Tor}_\bullet^A(k,k)$ es naturalmente una coálgebra.

demostración: Para una k-álgebra general (no necesariamente aumentada) tenemos

$$Deg(A)_n := \langle a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1} \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A \otimes A^{i-1} \otimes k1 \otimes A^{n-i} \otimes A \subseteq A \otimes A^{\otimes n} \otimes A = C_n(A)$$

es un subcomplejo (de todas las degeneraciones), y el cociente

$$\overline{C}_n(A) := C_n(A)/Deg_n(A) \cong A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A$$

donde $\overline{A} = A/k1$ como k-módulo, es un complejo con la misma homología (hay un ejercicio guiado para este caso particular, aunque es un resultado general de objetos simpliciales)

Lo usamos como resolución de A como A^e-módulo.

$$\cdots \to A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A \to \cdots \to A \otimes \overline{A} \otimes A \to A \otimes A \to A \to 0$$

En el caso A aumentada tomamos $\equiv \mathrm{Ker}\epsilon$. Tensorizando por $- \otimes_A k$ tenemos

$$\cdots \to A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes k \to \cdots \to A \otimes \overline{A} \otimes k \to A \otimes k \to k \to 0$$

$$d(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1$$
$$+ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes \epsilon(a_n)$$

bien

$$\cdots \to A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \to \cdots \to A \otimes \overline{A} \to A \not\to k \to 0$$

Es una resolución de k. Al calcular $k \otimes_A -$ queda

$$\cdots \to k \otimes \overline{A}^{\otimes n} \to \cdots \to k \otimes \overline{A} \to k \to 0$$

$\cong (T^c \overline{A}, b')$

Si $A = TV/(R)$ es cuadrática Koszul, entonces la inclusión

$$\begin{tikzcd} R_\bullet \arrow[r, equal] \arrow[rrr, bend left] & A^{¡} \arrow[r, hook] & T^cV \arrow[r, hook] & (T^c\overline{A}, b') = B(A) \end{tikzcd}$$

es un quasi-isomorfismo, donde a $R_\bullet$ se la considera una coálgebra d.g. con $d = 0$.

Prop: $A^{¡} \hookrightarrow B(A)$ es un q-iso si y solo si A es Koszul.

Dem: si A es Koszul $\Rightarrow$ ok.

Recíprocamente, si $A^{¡} \hookrightarrow B(A)$ es un q-iso queremos ver que

$$(A \otimes A^{¡}_{\bullet}, d_K) \to (A \otimes \overline{A}^{\otimes \bullet}, b')$$

es un q-iso. Equivale a ver que el cono es acíclico.
Recordamos $Co = (A \otimes A^{¡}_{\bullet+1} \ \oplus \ A \otimes \overline{A}^{\bullet}, d)$

Si filtramos por grado en $A^{¡}_{\bullet}$ y grado en $\overline{A}^{\otimes \bullet}$ entonces

$$gr(d_K) = 0 = \mathrm{id}_A \otimes 0; \ gr(b') = \mathrm{id}_A \otimes b'$$

es un q-iso, luego su cono es acíclico. $\therefore$ el cono original es filtrado con gr exacto, luego exacto. $\Rightarrow$ el morfismo original era un q-iso.

Construcción cobar

Dualmente, si C es coálgebra co-aumentada,
i.e. está dado $k \to C$ morfismo de coálgebras, es decir,
C tiene un elemento e tal que $\Delta e = e \otimes e$.
Fijamos una coálgebra coaumentada y su coaumentación.
Recordar $(\epsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(c) = 1 \otimes c \Rightarrow \epsilon(e) = 1$

$$\begin{array}{ccccc} C & = & \overline{C} & \oplus & ke \end{array}$$
$$c \mapsto (c - \epsilon(c)e) + \epsilon(c)e$$

donde $\overline{C} = \mathrm{Ker}\,\epsilon$. Se define

$$\Omega(C) := T\overline{C}$$

el **álgebra** tensorial en $\overline{C}$. Es graduada con $\deg \overline{C} = 1$.

Recordar que (C, Δ_C) es una coálgebra. Se define $d_\Delta : \overline{C} \to \overline{C} \otimes \overline{C}$ de la siguiente forma: si

$$\Delta c = \sum_i c_i' \otimes c_i'' \qquad \in C \otimes C$$

entonces se define

$$d_\Delta c = \sum_i (c_i' - \epsilon(c_i')e) \otimes (c_i'' - \epsilon(c_i'')e \qquad \in \overline{C} \otimes \overline{C}$$

Ejercicio: $d_\Delta c = \Delta c - (e \otimes c + c \otimes e)$ Se define un diferencial de grado $+1$ como la única super-derivación

$$\begin{tikzcd} \overline{C} \arrow[r, "d_\Delta"] \arrow[d] & \overline{C}^{\otimes 2} \subset T\overline{C} \\ T\overline{C} \arrow[ur, dashed, "d"] & \end{tikzcd}$$

$$d(\omega \otimes \eta) = d(\omega) \otimes \eta + (-1)^{deg\omega} \omega \otimes d(\eta)$$

$$\boxed{\Omega(C) := (T\overline{C}, d_\Delta)}$$

Hechos:

1. $d_\Delta^2 = 0 \iff \Delta$ es coasociativa.
2. si $A = TV/(R)$ y $C = R_\bullet = A^{¡} \subseteq T^c V = \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$.
   C es coaumentada con $e = 1$,

   $$\overline{C} = V \oplus R \oplus \cdots \twoheadrightarrow V \ \rightsquigarrow \ T\overline{C} \twoheadrightarrow TV$$

   se tiene $\Omega(A^{¡}) \to A$ via la composición

   $$\begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[r, equal] \arrow[rrrr, bend left, twoheadrightarrow] & T\overline{C} \arrow[r, twoheadrightarrow] & TV \arrow[r, twoheadrightarrow] & TV/(R) \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

3. A es Koszul $\iff (\Omega(A^{¡}), d) \to (A_\bullet, 0)$ es un q-iso.