**Def:** $M_A$ es playo si $M \underset{A}{\otimes} -$ preserva monos

Obs: $M$ playo

$\iff M \underset{A}{\otimes} -$ preserva s.e.c.

$(\iff M \underset{A}{\otimes} -$ preserva exactitud$)$

**Prop:** $M_A$ es playo $\Leftrightarrow Tor_n^A(M,-) \equiv 0 \ \forall n \geq 1$
$\Leftrightarrow Tor_1^A(M,-) \equiv 0$

$\Rightarrow\Rightarrow$) dado ${}_AN$,
encontramos $P_\bullet \to N$ resolución,
$\Rightarrow M \otimes_A P_\bullet$ es exacto donde $P_\bullet$ lo es
$\Rightarrow Tor_n(M,N) = 0 \ \forall n \geq 1$, y en particular para $n = 1$.

$\Leftarrow$) Si $f : N \to N'$ es mono
$\Rightarrow 0 \to N \xrightarrow{f} N' \to Coker(f) \to 0$ es una s.e.c.

$$\cdots \to Tor_1^A(M, Coker(f)) \to M \underset{A}{\otimes} N \xrightarrow{f \otimes Id} M \underset{A}{\otimes} N' \to M \underset{A}{\otimes} Coker(f) \to 0$$

es una s.exacta

Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ s.e.c. $\Rightarrow \forall N$

$$Tor_2^A(M'', N) \to Tor_1^A(M', N) \to Tor_1^A(M, N) \to Tor_1^A(M'', N) \to M \underset{A}{\otimes} N$$

Playitud:
$M'', M \Rightarrow M'$
$M', M'' \Rightarrow M$
$M', M \not\Rightarrow M''$ (ejercicio: encontrar contraejemplo)

($\exists$ playos no proy.: e.g. $\mathbb{Q}$ no es $\mathbb{Z}$-proy., no es libre!)

**Limites filtrantes:** $(I, \leq)$ filtrante $\Leftrightarrow \forall i, j \in I \; \exists k : i, j \leq k$

**Ejercicio:** Todo $M$ es límite filtrante de sus submódulos f.g.

**Lema:** (Ejercicio adicional guiado para el hogar)
en un límite **filtrante** (de $A$-módulos)

1) $\omega \in \lim\limits_{\to I} M^i \Rightarrow \exists i_0 : \omega \in Im(M^{i_0} \to \lim\limits_{\to I} M^i)$

2) $m \in M^{i_0}$, $m \mapsto 0 \in \lim\limits_{\to I} M^i \Rightarrow \exists j \geq i_0 : m \mapsto 0 \in M^j$.

$$\begin{tikzcd}
m \arrow[dr, mapsto] \arrow[rrrr, bend left, mapsto] & M_0^i \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\iota_{i\leq j}"] & & \lim\limits_{\to I} M^i & 0 \\
& 0 & M^j \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

Obs: $(M^i, d^i)$ sistema directo de complejos

$$\begin{tikzcd} M^j \arrow[r] \arrow[d, "j\leq k"'] & \varinjlim M^i \\ M_k \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} H_n(M^j) \arrow[r] \arrow[d, "j\leq k"'] & H_n(\varinjlim M^i) \\ H_n(M_k) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \varinjlim H_n(M^i) \to H_n(\varinjlim M^i)$

**Prop:** si $(I, \leq)$ es filtrante $\Rightarrow$

$$\varinjlim H_n(M^i) \cong H_n\big(\varinjlim M^i\big)$$

dem: $\omega \in \varinjlim M^i$, $\Rightarrow \omega$ viene de un $m \in M^i$
(y por lo tanto $d\omega$ viene de $dm$)

Si además $0 = d\omega \Rightarrow d(m) = 0$ en algun $M^j$ con $j \geq i$.

$$\Rightarrow \varinjlim Z(M^i) \to Z\left(\varinjlim M^i\right) \text{ es epi.}$$

$$M^j \ni \iota_{i\leq j}(m) \mapsto \omega$$

$$\Rightarrow \varinjlim H(M^i) \to H\left(\varinjlim M^i\right) \text{ es epi.}$$

si $\varinjlim H(M^i) \ni [\eta] \mapsto 0 \in H\left(\varinjlim M^i\right)$

$[\eta]$ viene de un $[m] \in H(M^i)$, y $[m] \mapsto 0$ en $H\left(\varinjlim M^i\right)$
entonces $[m]$ va a parar a alguien que es $d(\mu)$,
pero $\mu$ viene de un $m'$ en $M^j$.

Existe algún $k \geq i, j \ / \ m$ y $m'$ están en $M^k$,
y $m - dm'$ va a parar a cero en $\varinjlim M^i$
entonces en algun $M^\ell$ van a parar a cero, entonces
$[m] = 0$ en $H(M^\ell)$.

concluimos que
$\varinjlim H(M^i) \to H\left(\varinjlim M^i\right)$
es inyectiva

**Coro:** *Tor* conmuta con límites filtrantes

dem: Si $(I, \leq)$ es filtrante y $(\{M^i\}_{i \in I}, \{\iota_{i \leq j}\})$ es un sistema directo de $A$-módulos indexado por $(I, \leq)$, para calcular $Tor_n^A\Big(\lim\limits_{\to I} M_i, N\Big)$ resolvemos $N$

$$Q_\bullet \to N \to 0$$

entonces

$$Tor_n^A\Big(\lim_{\to I} M_i, N\Big) = H_n\Big((\lim_{\to I} M_i) \otimes_A Q_\bullet\Big)$$

como $- \otimes_A Q$ conmuta con limites diretos arbitrarios

$$\cong H_n\Big(\lim_{\to I}(M_i \otimes_A Q_\bullet)\Big) \cong \lim_{\to I} H_n(M_i \otimes_A Q_\bullet) = \lim_{\to I} Tor_n^A(M_i \otimes_A, N)$$

Recordamos $M$ playo $\iff$ $Tor_1^A(M,N)=0$ para todo $N$.

**Coro:** $M$ playo $\iff$ $Tor_1^A(M,N)=0$ $\forall N$ cíclico.

o sea, $\forall N \cong A/I$.

$\therefore$ basta recorrer los ideales a izquierda de $A$

dem $\Leftarrow$): Asumimos $Tor_1^A(M,N)=0$ para todo $N$ cíclico.
Sea $N$ f.g., $N=\langle x_1,\ldots,x_k\rangle$. se tiene una s.e.c.

$$0 \to \langle x_1\rangle \to N \to N/\langle x_1\rangle \to 0$$

Notar

$$N/\langle x_1\rangle = \langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k\rangle = \langle \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k\rangle$$

se puede generar con $k-1$ elementos.
$Tor_1^A(M,\langle x_1\rangle)=0$ por hipotesis
$Tor_1^A(M,N/\langle x_1\rangle)=0$ por hipotesis inductiva
$\Rightarrow Tor_1^A(M,N)=0$ por la s.e.larga

$$\cdots \to Tor_1^A(M,\langle x_1\rangle) \to Tor_1^A(M,N) \to Tor_1^A(M,N/\langle x_1\rangle) \to \cdots$$

$$\boxed{\therefore\ Tor_1^A(M,N)=0\ \forall N \text{ f.g.}}$$

$N$ es arbitrario $\Rightarrow N = \varinjlim N'$ con $N' \subseteq N$ f.g. es filtrante!

$$Tor_1^A(M,N) = Tor_1^A(M, \varinjlim N') = \varinjlim Tor_1^A(M,N') = \varinjlim 0 = 0$$

**Ejemplo:** $x \in A$ sin torsion a izquierda ($ax = 0 \Rightarrow a = 0$), $Tor_1^A(M, A/Ax)$ se calcula por:

Resolvemos $N = A/Ax$ via $0 \to A \stackrel{\cdot x}{\to} A \to N \to 0$, luego

$$Tor_\bullet^A(M,N) = H_\bullet\Big(M \otimes_A (0 \to A \stackrel{\cdot x}{\to} A \to 0)\Big)$$

$$\cong H_\bullet\Big(0 \to M \to^{\cdot x} M \to 0\Big)$$

$\Rightarrow Tor_1(M, A/Ax) = M^x = \{m : mx = 0\}$= $x$-torsión de $M$.
Si $M$ es playo y $A$ íntegro $\Rightarrow M$ no puede tener torsión.
Si $A$ es dip, entonces $M$ playo $\iff M$ no tiene torsión.