Tópicos de Álgebra Homológica

Marco Farinati, Dto de Matemátca FCEyN UBA - IMAS Conicet

1er cuatrimestre 2020

Índice

1. Introducción categórica y funtores en A-Mod

1.1. Categorías, Funtores, transformaciones naturales

Definir una categoría $\mathcal{C}$ es dar los siguientes datos:

objetos: Una clase, denotada $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

flechas: $\forall X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, un conjunto

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

(a veces denotado $[X, Y]$, $[X, Y]_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C}(X, Y)$, $Mor[X, Y]$).

satisfaciendo:

C1: (técnico) Si $X, X', Y, Y' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$
si $X \neq X'$, o $Y \neq Y'$, $\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') = \emptyset$.

C2: $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, una función (”composición”)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

que es asociativa (en el sentido obvio).

C3: $\forall X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\exists$“$\mathrm{Id}''_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, neutro para la composición.

Primeros ejemplos de categorías

- Sets: objetos= conjuntos, flechas= funciones.
- Si $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) = \{a\}$, entonces, una categoria con esos objetos es lo mismo que el dto de un monoide asociativo con 1:

$$M := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, a)$$

  puesto que es el unico conjunto de flechas que hay que dar, y los axiomas son justamente de monoide con 1.

- Top, Var^{∞}, kVect, A-mod, Gr, An, Sets_0, Top_0, $(I, \leq)$,...

Funtores

Los funtores son “morfismos entre categorías”, su aplicación primera es la de proveer de invariantes, pues los funtores mandan isos en isos. Es decir, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, es un funtor, $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y si FX NO es isomorfo a FY en $\mathcal{D}$, entonces X NO puede ser isomorfo a Y en $\mathcal{C}$.

Ejemplo 1.1. çomponentes conexas”:Top $\to$ Sets, π_1...

Observación 1.2. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor y $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ es un monoide con la composición.

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FXF, X)$$

es un morfismo de monoides.

Si $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ denota las unidades del monoide $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ (o sea, los isomorfismos de X en X), entonces F induce (por restricción) un morfismo de grupos

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(FX)$$

Comparacion de funtores: trasformacciones naturales

Si $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son dos funtores, una **transformacion natural** entre ellos es dar, para cada objeto X, un morfismo

$$\eta_X : FX \to GX$$

compatible con los morfismos. Es decir, tal que para toda $f : X \to Y$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"] & GX \arrow[d, "G(f)"] \\ FY \arrow[r, "\eta_Y"] & GY \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.3. $i_V : V \to V^{**}$

$$v \mapsto ev_v$$

Ejemplo 1.4. Hom: Si A es un anillo,

$$M \cong \mathrm{Hom}_A(A, M)$$

$$m \mapsto \phi_m\Big(a \mapsto am\Big)$$

$$\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$$

$$\phi \mapsto \phi(1)$$

Da una transformacion natural, que es un isomorfismo, entre los funtores Id y $\mathrm{Hom}_A(A, -)$

Ejemplo 1.5. Si A es una k-algebra (e.g. $A = k[x]/x^2$, o $A = k[G]$,...) entonces

$$\mathrm{Hom}_A(N, M) \subseteq \mathrm{Hom}_k(N, M)$$

es una "inclusion" natural de funtores. Es decir, para cada N fijo, se tiene una trasformacion natural (que en cada objeto es una inclusión

$$i : \mathrm{Hom}_A(N, -) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_k(N, -)$$

Observación 1.6. Si k es un A-módulo,

$$\mathrm{Hom}_A(k, M) \subseteq \mathrm{Hom}_k(k, M) \cong M$$

La filosofía es que con Hom se puede "modelar" funtores que son subobjetos. Por ejemplo, si G es un grupo que actua linealmente en un espacio vectorial V, entonces V es un $k[G]$ módulo y

$$\{v \in V : g(v) = v \ \forall g \in G\} =: V^G \cong \mathrm{Hom}_{k[G]}(k, V)$$

donde se toma la estructura trivial en k ($g \cdot \lambda = \lambda$, $\lambda \in k$)

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_k(k, V) \\
V^G \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, hook] & \mathrm{Hom}_{k[G]}(k, V) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.7. $\mathbb{Z}$ es el grupo libre en 1 elemento, esto dice

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}, G) \cong G$$

$$\phi \mapsto \phi(1)$$

Dado G, el conjunto "$G''_{(2)} = \{g \in G : g^2 = 1\}$, se puede modelar via

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_2, G) \cong \text{“}G''_{(2)}$$
$$\phi \mapsto \phi(1)$$

lo que muestra la naturaleza funtorial de este subconjunto asociado a G

Ejemplo 1.8.
$$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, G) \subseteq G \times G$$
$$\phi \mapsto (\phi(1,0), \phi(0,1))$$

$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, G)$="pares de elementos que conmutan".

Ejemplo 1.9.

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3, G) \cong \{(a, b) : a, b \in G, a^2 = 1, b^3 = 1, ab = ba\}$$

Ejemplo 1.10. $\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3, G) \cong \{(a, b) : a, b \in G, a^2 = 1, b^3 = 1\}$

Pregunta general:

En la categoria de A-modulos, si $F : A\text{-mod} \to \mathcal{C}$, y

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

(por ejemplo, si $Y = A^n$, esto da una presentacion de Z por n generadores, y las relaciones "X") ¿hay relación entre $F(X)$, $F(Y)$ y $F(Z)$?

1.2. Supremos, ínfimos, límites y colímites categóricos

Sea P un poset, $I \subseteq P$.
recordamos $sup(I)$ (en P):

- $c \in P$ es cota superior I si $i \leq c, \forall i \in I$.
- s_0 es un **supremo** para I si es "la mejor cota superior", i.e.
  - s_0 es cota superior de I, y
  - para toda cota superior c, tenemos que $s_0 \leq c$.
    (en particular toda cota superior es comparable a s_0.
    O sea, no es lo mismo supremo que maximal)

Obs: si existe, el supremo es único: si s_0 e s_1 son supremos,
entonces $s_0 \leq s_1$ (s_0 cota, s_1 sup)
y tambien $s_1 \leq s_0$ (s_1 cota, s_0 sup)
$\Rightarrow s_0 = s_1$ porque $\leq$ es de orden.

Colímite categórico: sistemas directos

$\mathcal{C}$ una categoría, $(I, \leq)$ un poset, y tomamos "un diagrama" en $\mathcal{C}$ indexado por I. Es decir, damos los siguientes datos:

- $X_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ para cada $i \in I$.
- para cada $i \leq j$ una flecha $\iota_{ij} : X_i \to X_j$ compatible con el orden:
  - $\iota_{ii} = \mathrm{Id}_{X_i}$
  - Si $i \leq j \leq k$, luego $i \leq k$. Pedimos $\iota_{ik} = \iota_{jk}\iota_{ij}$

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_{ij}"] \arrow[rr, bend right, "\iota_{ik}"'] & X_j \arrow[r, "\iota_{jk}"] & X_k \end{tikzcd}$$

  (i.e. hemos etiquetado el diagrama de Hasse de I, con objetos en los vértices y morfismos en las flechas)

Se llama un **sistema directo**.

Ejemplos

1. $I = \{a, b\}$, donde a y b no son comparables. Un diagrama indexado por I es simplemente dos objetos

   $I: \bullet \qquad \bullet$ diagrama: $X \qquad Y$

2. $I = \{1 < 2\}$

   $I:\ 1 \to 2,$ diagrama: $X \xrightarrow{f} Y$

3. $I = \{a \geq b \leq c\}$. Un diagrama son dos flechas con mismo dominio:

$$
I:\ \begin{tikzcd} b \arrow[r] \arrow[d] & a \\ c & \end{tikzcd}
\qquad\qquad
\text{diagrama: } \begin{tikzcd} X_b \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X_a \\ X_c & \end{tikzcd}
$$

Dado $\{X_i \stackrel{\iota_{ij}}{\to} X_j\}_{i \leq j}$ un diagrama en $\mathcal{C}$ idexado por un poset I, **un colímite** (o límite directo) en $\mathcal{C}$ de ese diagrama, denotado $\varinjlim_{I} X_i$ (o $\varinjlim_{I}{}^{\mathcal{C}} X_i$) es un objeto en $\mathcal{C}$ que es un "supremo" del diagrama (o sistema directo), i.e.

Definición 1.11. Un objeto X junto a morfismos $\iota_i : X_i \to X$ $\forall i \in I$
tal que $\forall i \leq j$, el diagrama sgte conmuta *(cota superior)*, y

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "\iota_{ij}"'] & X \\
X_j \arrow[ur, "\iota_j"'] &
\end{tikzcd}
$$

(la mejor cota) Si $\{f_i : X_i \to Y\}_i$ es otra familia de flechas como antes, entonces X es "mejor"

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "\iota_{ij}"'] \arrow[rr, bend left, "f_i"] & X \arrow[r, dotted, "\exists! f"] & Y \\
X_j \arrow[ur, "\iota_j"'] \arrow[urr, bend right, "f_j"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Observación 1.12. Si $(I, \leq)$ tiene máximo m_0, entonces X_{m_0} es el colímite del diagrama. La gracia es cuando no hay máximo en I.

Límite categórico: producto directo

En el ejemplo $I = \{a, b\}$, donde a y b no son comparables,

$$
\begin{tikzcd}
\bullet a & & \bullet a \arrow[dr] & \\
& \rightsquigarrow & & \bullet s_0 \\
\bullet b & & \bullet b \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Un diagrama en la categoría es simplemente dos objetos: $\bullet_a X$ y su colímite es (Z, ι_a, ι_b)

$\bullet_b Y$

que verifica

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\iota_a"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \forall Z', f, g \\
& Z \arrow[r, dotted, "\exists!"] & Z' \\
Y \arrow[ur, "\iota_b"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$Z := X \coprod Y$ se llama un **coproducto** categórico de X e Y.

Ejemplo 1.13. $1 \to 2$, $f : X \to Y$, el colímite es simplemente Y, pues es 2 es máximo. Las flechas son $f : X \to Y$ e $\mathrm{Id}_Y : Y \to Y$.

Ejemplo 1.14.
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d, dotted] \\ \bullet \arrow[r, dotted] & \circ \end{tikzcd}$$

Dado
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$
el **cuadrado (co)cartesiano** o push-out es

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "a"] & \\ Y \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "b"'] & X \coprod_Z Y \arrow[dr, dotted, "\exists!"] & \\ & & W \end{tikzcd}$$

Ejemplos de coproductos

- En grupos abelianos, o módulos, el coproducto $\coprod$ es la suma directa $\oplus$.
- En Sets, el coproducto es la unión disjunta.
- Notar que fijado A un anillo, el funtor $L : Sets \to A - mod$ dado por

$$L(X) = A^{(X)}$$

  (que a X le asigna el A-módulo libre en X)
  manda coproducto (en Sets) en coproducto (en A-mod)

* En Grupos (no necesariamente abelianos) el coproducto es el producto libre.

* en anillos **conmutativos** el coproducto es el producto tensorial sobre $\mathbb{Z}$

1.3. Lema de la Serpiente: introducción a los métodos con sucesiones exactas

Antes de continuar con las definiciones generales, veremos algunos ejemplos de funtores y su comportamiento con las sucesiones exactas para tener una idea de hacia dónde desarrollaremos la teoría. Consideremos

$$0 \to S \overset{i}{\to} T \overset{p}{\to} M \to 0$$

una s.e.c. de $k[x]$-modulos. Por comodidad supondremos que i es una inclusión y p la proyeccion al cociente (o sea, $S \subseteq T$ y $M = T/S$). Se definen

$$M^x = \{m : x \cdot m = 0\}$$

$$M_x = \frac{M}{x \cdot M}$$
(y similarmente para S y T). Construiremos un morfismo

$$\boxed{\delta : M^x \to S_x}$$

a partir de una s.e.c.

$$0 \to S \to T \to M \to 0$$

Este morfismo es, en realidad, una transformación natural

$$\delta : (-)ult^x \to (-)_x^{1ero}$$

donde los funtores $(-)_x^{1ero}$ y $(-)_{ult}^x$ son funtores definidos en la categoría de "las sucesiones exactas cortas":

$$\Big(0 \to S \to T \to M \to 0\Big)_x^{1ero} = S^x$$
$$\Big(0 \to S \to T \to M \to 0\Big)_{ult}^x = M^x$$

Si

$$m \in M^x \subseteq M = T/S$$
$$\Rightarrow m = \bar{t}$$

con $t \in T$. Luego, tambien

$$x \cdot t \in T$$

Pero

$$M = T/S \ni \overline{x \cdot t} = x \cdot \bar{t} = x \cdot m = 0$$

pues $m \in M^x$. Es decir, $x \cdot t \in S$.

La clase de $x \cdot t$ es cero módulo $x \cdot T$, pero no necesariamente es cero módulo $x \cdot S$. Se define

$$\delta : M^x \to S_x$$
$$m = \bar{t} \mapsto x \cdot t \text{ Mod } x \cdot S$$

Ejercicio: (2) de la práctica 1

δ esta bien definido (i.e. si $m = \bar{t} = \bar{t}' \in M = T/S \Rightarrow x \cdot t \equiv x \cdot t'$ MOD $x \cdot S$), δ es k-lineal, y

$$0 \to S^x \to T^x \to M^x \xrightarrow{\delta} S_x \to T_x \to M_x \to 0$$

es una sucesion exacta.

Algunas conclusiones / observaciones

- $(-)^x : k[x]$-mod$\to$ k-mod es un funtor, que preserva monomorfismos pero no epimorfismos (encuentre un ejemplo con $S_x \neq 0$ y $\delta \neq 0$, e.g. si $T_x = 0$,(por qué?)).

- $(-)_x : k[x]$-mod$\to$ k-mod es un funtor, que preserva epimofismos pero no monomorfismos (encuentre un ejemplo donde $M^x \neq 0$ y $\delta \neq 0$, e.g. si $T^x = 0$).

- Sugerencia: escriba la s.exacta para $T = k^2$ o k^3 donde x es una matriz de un solo bloque de Jordan.

- $(-)^x \cong \mathrm{Hom}_{k[x]}(k, -)$ donde la acción de x en k es cero.

- Todo funtor del tipo $\mathrm{Hom}_{k[x]}, (M, -)$ preserva monomorfismos, asi que $(-)_x$ no es de este tipo (o sea, $(-)_x$ no es representable, como funtor de la categoría de $k[x]$-módulos).

1.4. Propiedades universales, Hom y $\otimes$

Ejemplo de categoria: **las s.e.c.'s** en $\mathcal{C}$ y morfismos de s.e.c.

$$S: \qquad 0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

$$\mathrm{Obj}: \qquad (X, Y, Z, f : X \to Y, g : Y \to Z)$$

tal que $\mathrm{Ker} f = X$, $Imf = \mathrm{Ker} g$, f mono, g epi.

$$\mathrm{Hom}: \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{sec}(S_1, S_2) &= \{(a, b, c) : bf = f'a, cg = g'b\} \\ &\subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z') \end{aligned}$$

Toda s.e.c. es isomorfa a una inclusión y cociente:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Imf \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & Y/\mathrm{Ker} g \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[u, "f"', "\cong"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & Y/\mathrm{Ker} g \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}", "\cong"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Propiedad universal del cociente

Sea $S \subseteq M$ un submódulo y $\pi : M \to M/S$ la proyección al cociente, entonces π se anula en S, y $\forall f : M \to W \ / \ S \subseteq \mathrm{Ker} f$: existe una única factoorización de f a través de M/S. En diagramas:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ M/S \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad f = \overline{f} \circ \pi = \pi^*(f)$$

es decir, $(\overline{f} : M/S \to W) \leftrightarrow (f : M \to W : f|_S = 0)$

Notar que $i : S \to M$, $f|_S = f \circ i = i^*(f)$, $f|_S = 0 \Leftrightarrow f \in \mathrm{Ker} i^*$, o sea, para todo W,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(i^*) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_A(M, W) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_A(S, W) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M/S, W) \arrow[r, "\pi^*"] & \mathrm{Hom}_A(M, W) \arrow[r, "i^*"] & \mathrm{Hom}_A(S, W) \end{tikzcd}$$

Como toda sucesión exacta corta es isomorfa (como sucesión exacta corta) a una inclusión de un submódulo seguida del cociente por el mismo, podemos concluir rápidamente que una sucesión exacta corta

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

induce, para cualquier W, una sucesión exacta a izquierda:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(Z, W) \to \mathrm{Hom}_A(Y, W) \to \mathrm{Hom}_A(X, W)$$

1.5. Ley exponencial como primer ejemplo de adjunción

Recordamos la ley exponencial de números:

$$(a^b)^c = a^{(b \times c)}$$

y su interpretación en conjuntos

$$(Z^Y)^X = Z^{(X \times Y)}$$

que, en otra notación escribimos como

$$Func(X \times Y, Z) \leftrightarrow Func(X, Func(Y, Z))$$

$$f = f(x, y) \leftrightarrow \widehat{f}\Big(x \mapsto f_x = f(x, -) : Y \to Z\Big)$$

$$\mathrm{Hom}_{Sets}(X \times Y, Z) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{Sets}(X, \mathrm{Hom}_{Sets}(Y, Z))$$

Ley exponencial en grupos abelianos

Sean ahora X, Y, Z grupos abelianos y definimos
$\mathrm{Bil}(X \times Y, Z) = \Big\{ f : X \times Y \to Z :$
$$f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y),$$
$$f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y') \Big\}$$
Tenemos entonces una biyección

$$\mathrm{Bil}(X \times Y, Z) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(X, \mathrm{Hom}_{Ab}(Y, Z))$$

$$f \leftrightarrow \widehat{f}\Big(x \mapsto f(x, -)\Big)$$

Definición 1.15. $X \otimes_{\mathbb{Z}} Y = \mathbb{Z}^{(X \times Y)}/S$ donde $S = \Big\langle (x + x', y) - (x, y) - (x', y);\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y') \Big\rangle$

Notación: $x \otimes y = \overline{(x, y)}$.
Si Z es otro grupo abeliano

$$\mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z) \leftrightarrow \Big\{ f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^{(X \times Y)} : f|_S = 0 \Big\}$$

$$\leftrightarrow \Big\{ f \in Func(X \times Y, Z) : \begin{array}{l} f(x + x', y) - f(x, y) - f(x', y) = 0 \\ f(x, y + y') - f(x, y) - f(x, y') = 0 \end{array} \Big\}$$
$$\leftrightarrow \mathrm{Bil}(X \times Y, Z)$$

Propiedad universal del producto tensorial

La aplicación $X \times Y \to X \otimes Y$ $(x, y) \mapsto x \otimes y$ es bilineal, y si $b : X \times Y \to Z$ es bilineal

$$\Rightarrow \qquad \begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "b"] \arrow[d] & Z \\ X \otimes Y \arrow[ur, dashed, "{\exists! \bar{b},\ \textbf{lineal}}"'] & \end{tikzcd}$$

La propiedad universal escrita en términos de Hom + la Ley exponencial nos dice entonces

$$\mathrm{Hom}_{Ab}(X \otimes Y, Z) \leftrightarrow \mathrm{Bil}(X \times Y, Z) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(X, \mathrm{Hom}_{Ab}(Y, Z))$$

Si fijamos Y_0 y definimos
$$F(Z) := \mathrm{Hom}_{Ab}(Y_0, Z)$$
visto como funtor de Ab en Ab y

$$G(X) = X \otimes Y_0$$

entonces teenmos una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{Ab}(G(X), Z) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(X, F(Y))$$

es el ejemplo prototípico de adjunción en categorías abelianas

Producto tensorial sobre un anillo

Si A es un anillo, X_A es un A-módulo a derecha e ${}_AY$ es un A-módulo a izquierda, su producto tensorial sobre A, denotado $X \otimes_A Y$ se lo define como

$$\begin{aligned} X \otimes_A Y := \mathbb{Z}^{(X\times Y)} \Big/ \Big(& (x+x',y)-(x,y)-(x',y), \\ & (x,y+y')-(x,y)-(x,y'), \\ & (xa,y)-(x,ay)\Big) \\ = X \otimes_{\mathbb{Z}} Y \Big/ \Big(& xa\otimes y - x\otimes ay : x\in X,\ y\in Y,\ a\in A\Big) \end{aligned}$$

Propiedad universal de $X \otimes_A Y$

$$\mathrm{Bil}_A(X\times Y, M) := \{f : X\times Y \to M \textit{ bilineal } / \ f(xa,y) = f(x,ay)\}$$

La aplicación $X\times Y \to A\otimes_A Y$ $\Big((x,y)\mapsto x\otimes_A y\Big)$ es bilineal y A-balanceada y universal con esa propiedad:

$\forall b : X\times Y \to M$ bilineal A-balanceada $\exists!$ morfismo de grupos abelianos $\overline{b} : X\otimes_A Y \to M$ tal que

$$\overline{b}(x\otimes_A y) = b(x,y)$$

$$\begin{tikzcd} (x,y) \arrow[d, mapsto] & X\times Y \arrow[r, "b"] \arrow[d] & M \\ x\otimes y & X\otimes_A Y \arrow[ur, dotted, "\exists!\overline{b}"'] & \end{tikzcd}$$

Adjunción

Como antes, la propiedad universal escrita en términos de Homs queda:

$$\mathrm{Bil}_A(X\times Y, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X\otimes_A Y, M)$$

y si usamos la ley exponencial

$$\cong \mathrm{Hom}_{-A}(X_A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AY, M))$$

$$\text{y también} \quad \cong \mathrm{Hom}_{A-}({}_AY, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_A, M))$$

Como consecuencia, si $G(Y) = X\otimes_A Y$, $G : {}_A\text{-mod} \to \mathbb{Z}\text{-mod}$,

$$\boxed{\boxed{\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Y), M) \cong \mathrm{Hom}_A(Y, F(M))}}$$

donde $F(M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_A, M) \in {}_A\text{-mod}$.

Consecuencias de la adjunción

El funtor $X \otimes_A -$ es co-continuo, es decir, si tenemos un sistema directo

$$\left\{ Y_i, \overset{i \leq j}{\to} \right\}_{(I, \leq)}$$

en particular por cada $i \in I$ tenemos una flecha $Y_i \to \varinjlim_I Y_i$, y tensorizando tenemos

$$X \otimes_A Y_i \longrightarrow X \otimes_A \left(\varinjlim_I Y_i \right)$$

A su vez también teenmos un sistema directo

$$\left\{ X \otimes_A Y_i, \overset{1 \otimes (i \leq j)}{\longrightarrow} \right\}_{(I, \leq)}$$

La propiedad universal del límite de éste último sistema determina la flecha

$$\boxed{\varinjlim_I (X \otimes_A Y_i) \to X \otimes_A \left(\varinjlim_I Y_i \right)}$$

y por tener $X \otimes_A -$ adjunto a derecha, afirmamos que es un $\boxed{\text{isomorfismo}}$.

En particular $X \otimes_A (\oplus_i Y_i) \cong \oplus_i (X \otimes_A Y_i)$

Demostración. Llamamos $G(-) = X \otimes_A -$. Para cualquier grupo abeliano W,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(G(\varinjlim_I Y_i), W\Big) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\varinjlim_I Y_i, FW\Big) \arrow[d, "\cong"] \\
& \varprojlim_I \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y_i, FW) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\varinjlim_I G(Y_i), W\Big) \arrow[r, "\cong"] & \varprojlim_I \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(GY_i, W)
\end{tikzcd}$$

La demostración concluye con el siguiente Lema, que dejamos como ejercicio de categorías: $\square$

Lema 1.16. *En $\mathcal{C}$, $U \cong V \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$*
$\forall W$ (y natural en W).

o sea, $\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, -)$, isomorfismo natural de funtores. *Sugerencia: utilizar los casos $W = U$ y $W = V$ para obtenerlas flechas $U \to V$ y $V \to U$ candidatos a isomorfismos, más la naturalidad.*

Segunda consecuencia: exactitud a derecha

Si $Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} T \to 0$ es una s.e.c. en A-mod, entonces

$$X \otimes_A Y \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \otimes f} X \otimes_A Z \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \otimes g} X \otimes_A T \longrightarrow 0$$

es una s.e.c. de grupos abelianos. Esto es una consecuencia del sgte lema

Lema 1.17. *Sea R un anillo (e.g. $R = A, \mathbb{Z}, A^{op}, ...$), $f : S \to M$, $g : M \to N$ morfismos de R-módulos, entonces*

$$S \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

es una s.e.c. de R-mod $\Leftrightarrow$ para todo R-modulo W

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, W) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M, W) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(S, W)$$

es una s.e.c. de grupos abelianos.

Dejamos como ejercicio la demostración de este lema (ver por ejemplo [**?**]).

Observación 1.18. La demostración es válida en cualquier categoría abeliana.

Continuamos con la demostración de la exactitud a derecha de $X \otimes_A -$.

Sea $Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0$ una s.e.c. A-mod y llamamos $G(-) = X \otimes_A -$. Queremos ver que

$$G(Y) \xrightarrow{Gf} G(Z) \xrightarrow{Gg} G(T) \longrightarrow 0$$

sea exacta. Para esto, tomamos W un grupo abeliano arbitrario. Por el lema anterior, basta ver que

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(T), W) \xrightarrow{(Gg)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Z), W) \xrightarrow{(Gf)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Y), W)$$

Consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(T), W) \arrow[r, "(Gg)^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Z), W) \arrow[r, "(Gf)^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Y), W) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, F(W)) \arrow[r, "g^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z, F(W)) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y, F(W))
\end{tikzcd}$$

Como $Y \to Z \to T \to 0$ es exacta, aplicando $\mathrm{Hom}_A(-, F(W))$ la fila de abajo es exacta. La naturalidad implica que los cuadrados son conmutativos.

Applicación general

Así como teníamos "el funtor Hom $\rightsquigarrow$ funtores subobjeto, pues si $N \cong A^{(X)}/S$, (X= conjunto de generadores, S= submódulo de relaciones),

$$\mathrm{Hom}_A(A^{(X)}/S, M) \cong \{f \colon X \to M : f(S) \equiv 0\}$$

el "producto tensorial $\rightsquigarrow$ funtores cocientes":

Por ejemplo: si $\epsilon : A \to k$, A un k-álgebra aumentada entonces k es A-móduo via

$$1 \cdot a = \epsilon(a)$$

supongamos A es k-libre (e.g. si k es un cuerpo)

$$\begin{tikzcd}
M^{(\dim_k A)} \arrow[r] & M \arrow[r] & M/\langle am - \epsilon(a)m \rangle \arrow[r] & 0 \\
k \otimes_k A \otimes_k M \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & k \otimes_k M \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & k \otimes_A M \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & 0
\end{tikzcd}$$

$$1 \otimes a \otimes m \longmapsto \epsilon(a) \otimes m - 1 \otimes am$$

por lo tanto

$$k \otimes_A M \cong \frac{M}{\mathrm{Ker}(\epsilon) \cdot M}$$

2. Objetos diferenciales graduados

Módulos diferenciales graduados

Definimos los A-módulo diferenciales graduados. Una estructura diferencial graduada (d.g.) en $M \in A$-Mod es el dato de una descomposición

$$(M, d),\ M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n,$$

junto con una aplicación A-lineal $d : M \to M$ que verifica

$$d^2 = 0,$$

$$d(M_n) \subseteq M_{n-1} \ \ (complejo\ de\ cadenas)$$

si $d(M_n) \subseteq M_{n+1}$ se llama complejo de cocadenas

$$Notar:\ \widetilde{M_n} := M_{-n} \ \ cadenas \leftrightarrow cocadenas$$

Dibujo:

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{d} M_n \xrightarrow{d} M_{n-1} \xrightarrow{d} \cdots$$

Ejemplo del Análisis en $\mathbb{R}^3$

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^3$,

$$0 \to C^\infty(U) \xrightarrow{grad} (C^\infty(U))^3 \xrightarrow{rot} (C^\infty(U))^3 \xrightarrow{div} C^\infty(U) \to 0$$

Sabemos que Ker($grad$)= funciones localmente constantes = $\mathbb{R}^{\#\text{comp. conexas}}$

También sabemos que $rot(grad(f)) = 0$ y que $div(rot(F)) = 0$. A su vez, (teorema de campos conservativos), si U es simplemente conexo, entonces dado un campo F, existe ϕ talq ue $F = grad\phi \iff rotF = 0$, es decir, Ker($rot$) $= Im(grad)$.

En geometría diferencial vemos que la cohomología de ese complejo es exactamente la cohomología de De Rham de U $H_{dr}(U)$.

Ejemplo algebraico

$g \in G$, $g^N = 1$, M un G-módulo (e.g. $M = E/k$ una extensión de cuerpos y $G \in Gal(E/k)$), denotamos $tr_g := 1 + g + g^2 + \cdots + g^{N-1}$, entonces

$$\cdots \to M \xrightarrow{1-g} M \xrightarrow{tr_g} M \xrightarrow{1-g} M \xrightarrow{tr_g} M \xrightarrow{1-g} M \to 0$$

es un complejo.

Más ejemplos

1. Si B es un anillo y $A = B/(x)$, con x central, entonces
$$0 \to B \xrightarrow{x.} B \to B/(x) \to 0$$
es un complejo de B-módulos.

2. $A = B/(x, y)$, x, y centrales,
$$0 \to B \longrightarrow B \oplus B \longrightarrow B \longrightarrow B/(x, y) \to 0$$
$$b \mapsto (yb, -xb),$$
$$(b, c) \mapsto xb + yc$$

Nombres

Observamos que
$$d^2 = 0 \ \leftrightarrow Im(d) \subseteq \mathrm{Ker} d$$
La pregunta natural es cuándo se da la igualdad.

Definición 2.1. Un complejo se dice **exacto** si $Im(g) = \mathrm{Ker}(d)$. Se dice exacto en el lugar n
$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{d} M_n \xrightarrow{d} M_{n-1} \xrightarrow{d} \cdots$$
si $\mathrm{Ker}(d : M_n \to M_{n-1}) = d(M_{+1})$

Nombres:
Z_n=n-ciclos=$\mathrm{Ker}(d : M_n \to M_{n-1}) \subseteq M_n$
B_n=n-bordes=$d(M_{n+1}) \subseteq Z_n \subseteq M_n$
$H_n(M, d) := \dfrac{Z_n}{B_n}$, $\quad M$ exacto en lugar n $\Leftrightarrow H_n(M) = 0$

2.1. La categoría Chain(A)

Si (M, d_M) y (N, d_N) son complejos, un **morfismos de complejos** es una $f : M \to N$ A-lineal t.q.
$$f(M_n) \subseteq N_n \ \forall n \in \mathbb{Z}$$
$$f \circ d_M = d_N \circ f$$
Z_n, B_n y H_n son funtores.

Observación 2.2. Los Límites y colímites: se calculan grado a grado (en particular suma directa y producto). Idem Ker, Coker. También ser un morfismo es Epi (resp. mono, iso) si y sólo si lo es lugar a lugar.

Observación 2.3. A-mod esta incluida en Chain(A), viendo a un A-móduo M como complejo concentrado en lugar cero. Pero también Mor(A-Mod) está incluida en Chain(A) vía
$$(f : M \to N) \rightsquigarrow (\cdots \to 0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0 \to \cdots)$$
como complejo que ocupan los lugares -1 y 0 (por ejemplo). Veremos luego que este complejo no es otra cosa que el cono de f visto como morfismo de complejos.

Ejemplo 2.4. $A[0] = A$ "concentrado en grado cero",

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(A[0], M) &\cong Z_0 \subseteq M_0 \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
{} \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "d"] & M_0 \arrow[r, "d"] & M_{-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(A[0], -) \cong Z_0(-)$ no es exacto, luego, el complejo A no es proyectivo en la categoría de complejos.

Ejemplo 2.5. Consideramos ahora Id_A como complejo, más precisaente definimos el complejo $\mathbf{P}$ por $\mathbf{P}_0 = A$, $\mathbf{P}_1 = A$, $d = \mathrm{Id}_A$. Calculamos $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(\mathbf{P}, -)$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{P}, d) & & \cdots 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] \arrow[d, "f_0"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
(M, d) & \cdots \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "d"] & M_0 \arrow[r, "d"] & M_{-1} \arrow[r] & M_{-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(\mathbf{P}, M) &\cong M_0 \\ (f_0, f_1) &\mapsto f_0(1) \end{aligned}$$

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(\mathbf{P}, -)$ es exacto! $\therefore$ $\mathbf{P}$ es proyectivo en $\mathrm{Chain}(A)$.

2.2. Lema de la serpiente

Este lema central en álgebra homológica dice lo siguiente: dado un diagrama conmutativo como el que sigue

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' &
\end{tikzcd}$$

con sus filas exactas, entonces se puede definir un morfismo $\delta : \mathrm{Ker}(c) \to CoKer(a)$ siguiendo el camino zigzagueante punteado

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}(a) \arrow[r, "f|"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(b) \arrow[r, "g|"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(c) \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend left] & \\
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "c"] \arrow[dl, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend right] & Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] \arrow[l, dotted, bend left] & Z' \arrow[d] & \\
 & Coker(a) \arrow[r, "\overline{f'}"] & Coker(b) \arrow[r, "\overline{g'}"] & Coker(c) &
\end{tikzcd}$$

y

y resulta que la sucesión

$$\mathrm{Ker}(a) \to \mathrm{Ker}(b) \to \mathrm{Ker}(c) \xrightarrow{\delta} \mathrm{CoKer}(a) \to \mathrm{CoKer}(b) \to \mathrm{CoKer}(c)$$

es exacta.

Demostración. Sólo la indicamos. Como sugiere el dibujo, dado $z \in \mathrm{Ker}(c)$, lo vemos como elemento de Z, al ser g epi, existe $y \in Y : g(y) = z$, aplicamos b y obtenemos $b(Y) \in Y'$, pero por la conmutatividad del cuadrado de la derecha y por ser $z \in \mathrm{Ker}(c)$ resulta $b(y) \in \mathrm{Ker}(g') = Im(f)$, luego $b(y) = f(x')$ para cierto x'. Finalizamos definiendo $\delta(z) := \overline{x}' \in X'/Im(a)$. El resto de la demostración es un chequeo de la buena definición de δ y de las exactitudes en cada lugar de la sucesión de los núcleos y conúcleos. $\square$

Lema de la serpiente y sucesión exacta larga en homomlogía

El lema de la serpiente nos provee del resultado general más importante sobre complejos y sucesiones exactas, que es el siguiente:

Teorema 2.6. *Si* $0 \to X_\bullet \to Y_\bullet \to Z_\bullet \to 0$ *es s.e.c. de complejos*

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_X"] & Y_{n+1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Y"] & Z_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_X"] & Y_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Y"] & Z_n \arrow[r] \arrow[d, "d_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_X"] & Y_{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Y"] & Z_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_Z"] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Entonces queda inducida una s.e. larga en los grupos de homolgía

$$\cdots \to H_{n+1}(Z) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X) \xrightarrow{f_n} H_n(Y) \xrightarrow{g_n} H_n(Z) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(X) \to \cdots$$

Demostración. Del diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_X"] & Y_{n+1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Y"] & Z_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_X"] & Y_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Y"] & Z_n \arrow[r] \arrow[d, "d_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_X"] & Y_{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Y"] & Z_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_Z"] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

se sigue el sgte diagrama (con filas exactas):

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{X_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\bar{d}_X"] & \frac{Y_n}{d(Y_{n+1})} \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\bar{d}_Y"] & \frac{Z_n}{d(Z_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & d(X_n) \arrow[r, "f|"] \arrow[d, "\subseteq"] & d(Y_n) \arrow[r, "g|"] \arrow[d, "\subseteq"] & d(Z_n) \arrow[d, "\subseteq"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d^X_{n-1}) \arrow[r, "f|"] & \mathrm{Ker}(d^Y_{n-1}) \arrow[r, "g|"] & \mathrm{Ker}(d^Z_{n-1}) &
\end{tikzcd}$$

Le aplicamos el Lema de la serpiente al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{X_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\bar{d}_X"] & \frac{Y_n}{d(Y_{n+1})} \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\bar{d}_Y"] & \frac{Z_n}{d(Z_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(X) \arrow[r, "f|"] & Z_{n-1}(Y) \arrow[r, "g|"] & Z_{n-1}(Z) &
\end{tikzcd}$$

y obtenemos el morfismo de conexión δ_n que "pega" las sucesiones de homología en grado n con las de grado $n-1$

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & H_n(Y) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & H_n(Z) \arrow[d] & \\
 & \frac{X_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\bar{d}_X"] & \frac{Y_n}{d(Y_{n+1})} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\bar{d}_Y"] & \frac{Z_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Z_{n-1}(Y) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z_{n-1}(X) \arrow[d] & \\
 & H_{n-1}(X) \arrow[r, "f"] & H_{n-1}(Y) \arrow[r, "g"] & H_{n-1}(Z) &
\end{tikzcd}$$

□

Aplicación general

Sea $(Y_\bullet, d)$ un complejo, queremos calcular $H_\bullet(Y)$. Supongamos que conocemos un **subcomplejo** $X \subseteq Y$. O sea, $\forall n$ damos un A-submódulo $X_n \subseteq Y_n$ t.q. $d(X) \subseteq X$. Queda definido el complejo cociente $(Y/X)_n = Y_n/X_n$, $d_{Y/X} = \overline{d}$ y la s.e.c de complejos

$$0 \to X \to Y \to Y/X \to 0$$

$H_n(X)$ no siempre es submódulo de $H_n(Y)$, $H_n(Y/X)$ no siempre es cociente de $H_n(Y)$ por $H_n(X)$. Lo que sí sucede es que hay una sucesion exacta larga

$$\cdots \to H_{n+1}(Y/X) \to H_n(X) \to H_n(Y) \to H_n(Y/X) \to H_{n-1}(X) \to \cdots$$

2.3. Operaciones con complejos

Dado un morfismo de complejos $f : (M_\bullet, d) \to (N_\bullet, d)$ tenemos los nuevos complejos $\mathrm{Ker}(f)$ y $\mathrm{CoKer}(f)$:

$$(\mathrm{Ker}(f))_n = \mathrm{Ker}(f : M_n \to N_n),\ d_{\mathrm{Ker}} = d|$$

$$(\mathrm{Ker}(f))_n = N_n/f(M_n),\ d_{\mathrm{CoKer}} = \overline{d}$$

También tenemos las operaciones de Suma directa / Producto directo, límites y colímites. Todas estas operaciones, de alguna manera provienen de operaciones en A-módulos. Una operación propiamente de complejos es la siguiente: dados

$$(M_\bullet, d) \in \mathrm{Chain}({}_A Mod_B),\ (N_\bullet, d) \in \mathrm{Chain}({}_B Mod_C)$$

se define el complejo producto tensorial $M \otimes_A N \in \mathrm{Chain}({}_A Mod_C)$ como el objeto graduado

$$(M \otimes_A N)_n = \bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes_A N_q$$

y con diferencial

$$d(m \otimes n) := d(m) \otimes n + (-1)^{|n|} m \otimes d(n)$$

Más tarde veremos la relación entre la homología del producto tensorial y el producto tensorial de las homologías (fórmula de Künneth).

Otras operaciones propiamente del ámbito de los complejos son las siguientes:

Suspensión

Ddo un complejo M, se define $M[-1]$, o también denotado ΣM como "el mismo" complejo pero trasladada su graduación en 1 (y es muy conveniente adoptar la convención de un cambio de signo en el diferencial)

$$\Sigma(M)_n = M_{n-1},\ d_{\Sigma M} = -d_M$$

$$\begin{array}{ll} M: & \cdots \to M_{n+1} \to M_n \to M_{n-1} \to \cdots \quad \cdots \to M_1 \to M_0 \to \cdots \\ \Sigma M: & \cdots \to M_n \to M_{n-1} \to M_{n-2} \to \cdots \quad \cdots \to M_0 \to M_{-1} \to \cdots \end{array}$$

Ejemplo 2.7. Si $M \in {}_A Mod$ es un complejo concentrado en grado cero $\Rightarrow$ $\Sigma(M)$ está concentrado en grado 1

Observación 2.8. Σ es un funtor inversible. Está definido Σ^n $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\Sigma(H_\bullet(M)) = H_\bullet(\Sigma(M))$$

El cono de un morfismo

Si $f : M \to N$, definimos

$$\Big(Co(f)\Big)_n := N_n \oplus \Sigma(M)_n = N_n \oplus M_{n+1}$$

$$\partial(n,m) := (dn + f(m), -d(m))$$

Verifica $\partial^2 = 0$, pues

$\partial^2(n,m) = \partial\big(dn{+}f(m), -d(m)\big) = \big(d(dn{+}f(m)){+}f(-dm), -d(-d(m))\big) = (d^2n{+}(df{-}fd)(m), d^2m) =$

dado que $d^2 = 0$ en M y N, y f es morfismo de complejos, por lo tanto conmuta con el diferencial. Además, claramente hay una s.e.c. de complejos

$$\boxed{0 \to N \to Co(f) \to \Sigma M \to 0}$$

Triángulos:

La sucesión excta anterior se puede continuar indefinidamente a la derecha y a la izquierda, no de manera exacta, ni siquiera como complejo, pero luego veremos que al tomar homología dará una sucesion exacta larga. Esta construcción se la denomina "triángulo", por su similitud a la 3-periodicidad (salvo suspensión). Se agrega a la s.e.c. el morfismo f

$$M \xrightarrow{f} N \longrightarrow Co(f) \longrightarrow \Sigma M$$

y aplicando Σ, o Σ^{-1} tenemos

$$\cdots \to \Sigma^{-1}Co(f) \to M \xrightarrow{f} N \to Co(f) \to \Sigma M \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma N \to \Sigma Co(f) \to \cdots$$

Sucesión exacta larga del cono

Veremos que la s.e.c. del cono de $f : M \to N$

$$Co(f) = N \oplus_f \Sigma M$$

$$Co(f)_n = N_n \oplus M_{n-1}$$

$$\partial(x,m) = (dx + fm, -dm)$$

$$0 \to N \to Co(f) \to \Sigma M \to 0$$

que induce ua sucesión exacta larga en homología, su morfismo de conexión es justmente f.

Para eso recordamos el uso del Lema de la serpiente : $0 \to X \to Y \to Z \to 0 \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
\rightsquigarrow & H_n(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & H_n(Y) \arrow[r, "p"] \arrow[d] & H_n(Z) \arrow[d] & \\
& \frac{X_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\bar{d}_X"] & \frac{Y_n}{d(Y_{n+1})} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\bar{d}_Y"] & \frac{Z_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & Z_{n-1}(Y) \arrow[r, "p"] \arrow[d] & Z_{n-1}(X) \arrow[d] & \\
& H_{n-1}(X) \arrow[r, "i"] & H_{n-1}(Y) \arrow[r, "p"] & H_{n-1}(Z) &
\end{tikzcd}$$

En el caso de la s.e.c. del cono tenemos

$$
\begin{tikzcd}
\rightsquigarrow & H_n(N) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(Co(f)) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(M) \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend left, "\overline{m}"] & \\
 & \frac{N_n}{d(N_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{N_n \oplus M_{n-1}}{d(Co(f)_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{M_{n-1}}{d(N_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "(0{,}m)"', "(f(m){,}0)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(N) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend right, "\overline{f(m)}"'] & Z_{n-1}(Co(f)) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, dotted, bend left, "f(m)"] & Z_{n-2}(M) \arrow[d] & \\
 & H_{n-1}(N) \arrow[r] & H_{n-1}(Co(f)) \arrow[r] & H_{n-2}(M) &
\end{tikzcd}
$$

Una relación importante que se deduce de esto es:

Lema 2.9. $f : M \to N$ *es q-iso* $\iff H_\bullet(Co(f)) = 0$

Demostración. consideramos la s.e.c. $0 \to N \to Co(f) \to \Sigma M \to 0 \rightsquigarrow$ que induce la s.e.l

$$H_{n+1}(N) \to H_{n+1}(Co(f)) \to H_{n+1}(\Sigma M) \overset{[f]}{\to} H_n(N) \to H_n(Co(f))$$

y concluimos. $\square$

q-isos y homotopías

Definimos la relacin de equivalencia de homotopía entre morfismos de complejos por

Definición 2.10. Si $f, g : M \to N$ son dos morfismso de complejos, decimos que son homotópicos, y denotamos $f \sim g \iff \exists h$ A-lineal tal que $f - g = dh + hd$

La aplicación imediata es que si $f \sim g : M \to N$ entonces f y g inducen *el mismo* morfismo entre las homologías:

Demostración. Sea $m \in M$ tal que $dm = 0$ y h A-lineal talq ue $f - g = dh + hd$, entonces

$$f(m) - g(m) = d(hm) + h(dm) = d(hm) + 0$$

por lo tanto

$$[f(m)] = [g(m)] \ MOD \ Im(d)$$

es decir,

$$[f] = [g] : H_\bullet(M) \to H_\bullet(N)$$

$\square$

Definición 2.11. Decimos que dos complejos M y N son equivalentes homotópicos si existen morfismos de complejos $\phi : M \to N$ y $\psi : N \to M$ tales que

$$\phi \circ \psi \sim \mathrm{Id}_N, \ \psi \circ \phi \sim \mathrm{Id}_M$$

Observamos que equivalencia homotópica implica quasi-isomorfismo, pero las nociones no son equivalentes.

Ejemplo 2.12. Tomamos los complejos P y M:

$$P: \ \cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \ \to 0 \to \dots$$

$$M: \ \cdots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0 \to \dots$$

tienen misma homología (no nula), pero $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(\mathbb{Z})}(M, P) = 0$!

Sin embargo, existe un morfismo en el otro sentido $f : P \to M$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2"] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \dots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

que induce un isomorfismo en homología.

Si queremos calcular homología, queremos complejos a menos de q-is, que es más débil que a menos de homotopía.

Nombres

Si en $(M_\bullet, d)$ $\exists h$ t.q. $hd + dh = \mathrm{Id}_M \Rightarrow H_\bullet(M) = 0$, en ese caso diremos que M es *contráctil*. Si sólo sabemos que $H_\bullet(M) = 0$=acíclico, diremos que M es *acíclico*.

Ejemplos:

Para un complejo de longitud dos:
$0 \to X \to Y \to 0$ contráctil o acícilo es lo mismo
Sin embargo, para un complejo de longitud 3:
$0 \to X \to Y \to Z \to 0$
ser acíclico = exactitud, mientras que contráctil = la s.e. se parte.

2.4. Complejos contráctiles y funtores aditivos

Consideremos una s.e.c.

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

una s.e.c. en A-Mod, y $F : A\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$. una pregunta natural es si

$$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$$

una s.e.c.

Supongamos F ditivo, es decir, $F(f + f') = F(f) + F(f')$, luego $F(0) = 0$,

$$\Rightarrow \qquad 0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$$

es un complejo. Cuanto vale su homología?

Si $(M_\bullet, d)$ es *contráctil*, con homotopía h y F es aditivo, entonces $(F(M)_\bullet, F(d))$ es contráctil con homotopía $F(h)$, pues

$$d_{FM}F(h) + F(h)d_{FM} = F(d_M)F(h) + F(h)F(d_M)$$

$$= F(d_M h) + F(hd_M) = F(d_M h + hd_M) = F(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{FM}$$

Luego, todo funtor aditivo manda complejos contráctiles en complejos contráctiles. En particular, sucesiones exactas que se parten en sucesiones exactas. El problema de preservar la exactitud aparece al calcular F en las sucesines exactas que no se parten. Para estudiar el comportamiento con respecto a la exactitud se define el funtor derivado a F.

2.5. Funtores derivados: Estrategia

Como las suesiones exactas de módulos proyctivos siempre se parten, y ahí los funtores (aditivos) siempre preservan exactitud, una estrategia es reemplazar $M \in {}_AMod$ por un complejo mejor comportado, lo que se denomina una *resolución proyectiva*:

$$M \rightsquigarrow (\cdots P_{n+1} \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0)$$

Es decir, un complejo exacto con P_n proyectivo$\forall n \geq 0$.

Tenemos entonces un morfismo de complejos, que es un q-is

$$\begin{tikzcd}
(P_\bullet, d) & \cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Podemos pensar que $P_\bullet$ s un reemplazo qusi-isomorfo de M en $\mathrm{Chain}(A)$. Si aplicamos F en $P_\bullet$ (en vez de en M) se define

$$L_nF(M) := H_n(F(P_\bullet))$$

Esta definición en principio depende de la resolución proyectiva. Cabe preguntarse, hay funtorialidad? Es decir, i $f : M \to N$, podemos definir un morfismo de resoluciones asociado a f?

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Buena definición (1): hay algún tipo de unicidad del levantado de f?

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] \arrow[dl, dotted] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dl, dotted] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] \arrow[dl, dotted] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] \arrow[dl, dotted] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Buena definición (2): Hay unicidad de resolución, a menos de homotopía? si tenemos dos resoluciones, serán equivalentes homotópicas? Si supieramos que el levantado de un morfismo f es único a menos de homotopía, al considerar dos posibles resoluciones, levantando la identidd de M tendríamos morfismos de comparación entre los complejos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1}"] & Q_n \arrow[r] \arrow[d, "g_n"] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y si los componemos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1}f_{n+1}"'] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "g_nf_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tendríamos un morfismos que levanta la identidad. Pero claramente la identidad de $P_\bullet$ también levanta la identidad, luego, sabiendo que el levantado es único a menos de homotopía podríamos concluir

$$gf \sim \mathrm{Id}_{P_\bullet}$$

y con argumento similar también $fg \sim \mathrm{Id}_{Q_\bullet}$.

Estos lemas de unicidad a menos de homotopía son ciertos, los mostraremos más adelante. Nos permiten concluir que $P_\bullet = P(M)$ bien definido a menos de equivalencia homotópica (i.e. a menos de iso en $\mathcal{H}(A)$), y fijadas resoluciones $P_\bullet$ y $Q_\bullet$ de M y N, está bien definido

$$f : M \to N \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P_\bullet, Q_\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(P, Q)/\sim$$

Proposición 2.13. *Si F es exacto a derecha, entonces*

$$LF_0(M) = H_0(F(P_\bullet)) \cong F(M)$$

Demostración.

$$L_nF(M) = H_n\Big(\cdots FP_{n+1} \to FP_n \to \cdots \to FP_1 \to FP_0 \to 0\Big)$$

a partir de una resolución

$$\cdots \to P_{n+1} \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

tenemos

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

usando que F es exacto a derecha, tenemos lasiguiente sucesión exacta:

$$(*) \qquad FP_1 \xrightarrow{F(d_1)} FP_0 \xrightarrow{F(d_0)} FM \longrightarrow 0$$

Concluimos $FM \cong \mathrm{CoKer}\Big(FP_1 \xrightarrow{F(d_1)} FP_0\Big) =$

$$H_0\Big(\cdots FP_{n+1} \to FP_n \to \cdots \to FP_1 \to FP_0 \to 0\Big) = L_0F(M)$$

□

El ejemplo más importante que veremosde funtor derivado a izquierda es:

Definición 2.14. $\boxed{\operatorname{Tor}_n^A(M,N) = L_n(M \otimes_A -)(N) = H_n(M \otimes_A P_\bullet)}$

2.6. Lemas de levantamiento

Lema 2.15. *Sea $f : M \to N$ y consideremos un diagrama con*

$$\begin{tikzcd}
P_i \textit{ proyectivos} & \cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\textit{exacto} & \cdots \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces $\exists\ \{f_n : P_n \to Q_n\}_{n\geq 0}$ que completan el diagrama con todos los cuadrados conmutativos.

Demostración. El caso f_1 lo indicamos esquemáticamente:

$$\begin{tikzcd}
f_0 : & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dashed, "f_1 := \widetilde{f \circ d_0}"'] \arrow[dr, dotted, bend left, "f \circ d_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
& Q_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & Q_0 \arrow[r, "\partial_0"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

su existencia se debe que ∂_0 es epi y a que P_0 es proyectivo. Además, como el cuadrado queda conmutativo, vemos que $\partial_0 \circ f_1 \circ d_1 = f \circ d_0 \circ d_1 = 0$, luego, la imagen de $f_1 \circ d_1$ está contenida en el núcleo de ∂_0, y como el complejo $Q_\bullet$ se lo suponía exacto, coincide con la imagen de ∂_1. Podemos co-restringir a la imagen de ∂_1 y continuar inductivamente. Concretamente:

Inductivamente suponemos definido hasta f_n con los cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[d, "\cdots"', "\cdots"] \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+2}"'] & Q_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & Q_n \arrow[r, "\partial_n"'] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

por la conmutatividad del último cuadrado, con el argumento anterior podemos restringir a la imagen de ∂_{n-1} y tener un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[rr, "d_{n+1}"] \arrow[dr, "f_n \circ d_{n+1}"] \arrow[dd, "f_{n+1} = "', "\widetilde{f_n \circ d_{n+1}}"] & & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dd, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[dd, "\cdots"', "\cdots"] \\
& & Im(\partial_{n+1}) \arrow[dr, hook] & & & \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+2}"'] & Q_{n+1} \arrow[rr, "\partial_{n+1}"'] \arrow[ur] & & Q_n \arrow[r, "\partial_n"'] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

□

Lema 2.16. *Unicidad del levantado a menos de homotopía: $\{f_n\}_{n\geq 0}$ levanta al $0 \Rightarrow f \sim 0$*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] \arrow[dl, dotted] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dl, dotted, "h_n"'] & \cdots \arrow[r] \arrow[dl, dotted] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] \arrow[dl, dotted, "h_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] \arrow[dl, dotted, "h_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] \arrow[dl, dotted, "0"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demostración. caso 0

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] \arrow[dl, dotted, "h_0?"'] & M \to 0 \arrow[d, "0"] \arrow[dl, "h_{-1}=0"'] \\
Q_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & Q_0 \arrow[r, "\partial_0"'] & N \to 0
\end{tikzcd}$$

Queremos ver $dh + hd = f$. En el caso de f_0, si tomamos $h_{-1} = 0$, buscamos h_0 tal que $\partial_1 h_0 + 0 d_0 = f_0$, es decir, que

$$\partial_1 h_0 = f_0$$

Notamos que el cuadrado de la derecha conmuta, luego $Im(f_0) \subseteq \text{Ker}(partial_0) = Im(\partial_1)$, asi que si corestringimos f_0 y ∂_1 a la imagen de ∂_1, la existencia de h_0 se debe a la proyectividad de P_0.

Paso inductivo:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] \arrow[dl, dotted, "h_{n+1}?"'] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dl, "h_n"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] & \cdots \\
Q_{n+2} \arrow[r, "\partial_{n+2}"'] & Q_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & Q_n \arrow[r, "\partial_n"'] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Asumimos válida la fórmula $f_n = \partial_{n+1} h_n + h_{n-1} d_n$, buscamos h_{n+1} tal que

$$f_{n+1} = \partial_{n+2}(h_{n+1}?) + h_n d_{n+1}$$

Esto es equivalente a

$$\underbrace{f_{n+1} - h_n d_{n+1}}_{g} = \partial_{n+2}(h_{n+1}?)$$

Notamos que $g : P_{n+1} \to Q_{n+1}$ verifica $Im(g) \subseteq Im(\partial_{n+1}) = \text{Ker}(\partial_{n+1})$ pues

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} g &= \partial_{n+1}(f_{n+1} - h_n d_{n+1}) \\ &= \partial_{n+1} f_{n+1} - \partial_{n+1} h_n d_{n+1} \end{aligned}$$

por conmutar el último cuadrado queda

$$= f_n d_{n+1} - \partial_{n+1} h_n d_{n+1}$$

y sacando factor común

$$= (f_n - \partial_{n+1} h_n) d_{n+1}$$

Pero por hipótesis inductiva $f_n = \partial_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n$, luego,

$$(f_n - \partial_{n+1}h_n)d_{n+1} = (\partial_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n - \partial_{n+1}h_n)d_{n+1}$$

$$= h_{n-1}d_nd_{n+1} = h_{n-1}0 = 0$$

y concluimos la existencia de h_{n+1} por la proyectividd de P_{n+1}. $\square$

Corolario 2.17. *Unicidad de resolución a menos de equvalencia homotópica*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1}"] & Q_n \arrow[r] \arrow[d, "g_n"] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1}f_{n+1}"'] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "g_nf_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow gf \sim \mathrm{Id}_{P_\bullet}$.

Corolario 2.18. *Si un complejo $P_\bullet$ es exacto, tiene todas sus componentes P_n proyectivas, y $P_n = 0$ para $n << 0$, entonces es contráctil.*

Demostración. Consideramos

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_{n_0} \to 0 \to 0 \to \cdots$$

un complejo con esas propiedades. A menos de suspención, podemos asumir $n_0 = 0$. Observamos que este complejo es una resolución proyectiva del módulo $M = 0$. Utilizando la unicidad del levantado, vemos que tanto el morfismo 0 como $\mathrm{Id}_{P_\bullet}$ levantan a $0 = \mathrm{Id}_0$, luego $\mathrm{Id}_{P_\bullet} \sim 0$. $\square$

Volviendo a los funtores derivados, concluimos, $P_\bullet = P(M)$ bien definido a menos de equivalencia homotópica (i.e. a menos de iso en $\mathcal{H}(A)$), y fijadas resoluciones $P_\bullet$ y $Q_\bullet$ de M y N, está bien definido

$$f : M \to N \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P_\bullet, Q_\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(P, Q)/\sim$$

Es decir, tomar una resolución da un funtor, definido a menos de iso único

$$A - Mod \to \mathcal{H}(A)$$

$$M \mapsto P(M)$$

$$f \mapsto \{f_n\}_{n\geq 0}$$

Recordamos que si N_A, ${}_AM$, entonces

$$\mathrm{Tor}_n^A(N,M) = H_n(N \otimes_A P_\bullet)$$

donde $P_\bullet \to M \to 0$ es una resolución de M como A-módulo.

Como $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ es exacta $\Rightarrow N \otimes_A P_1 \to N \otimes_A P_0 \to N \otimes_A M \to 0$ también $\Rightarrow \mathrm{Tor}_0^A(N,M) = H_0(N \underset{A}{\otimes} P_\bullet) =$

$$= H_0(\cdots \to N \underset{A}{\otimes} P_2 \to N \underset{A}{\otimes} P_1 \to N \underset{A}{\otimes} P_0 \to 0) \cong N \underset{A}{\otimes} M$$

Pero $\mathrm{Tor}_n^A(N,M)$ con $n > 0$ son funtores "nuevos".

Ejemplo 2.19. $A = k[x,y]$, $M = N = k$ con $p(x,y)\cdot 1 = p(0,0)$. Para calcular $\mathrm{Tor}_n^A(k,k)$:

$$P_\bullet \to k \to 0: \quad 0 \to A \longrightarrow A \oplus A \longrightarrow A \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

$$p \mapsto (yp, -xp) \qquad p \longmapsto p(0)$$

$$(f,g) \longmapsto xf + yg$$

$k \otimes_A P_\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & k \underset{A}{\otimes} A \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & k \underset{A}{\otimes} A \oplus k \underset{A}{\otimes} A \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & k \underset{A}{\otimes} A \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r] & k \oplus k \arrow[r] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\therefore \mathrm{Tor}_1^A(k,k) = k \oplus k, \qquad \mathrm{Tor}_2^A(k,k) = k.$

Veremos luego las siguientes propiedades:

- $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ s.e.c. de A-mod $\Rightarrow \forall N_A$:

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^A(N,X) \to \mathrm{Tor}_1^A(N,Y) \to \mathrm{Tor}_1^A(N,Z) \to N \underset{A}{\otimes} X \to N \underset{A}{\otimes} Y \to N \underset{A}{\otimes} Z \to 0$$

- Tor deriva $\underset{A}{\otimes}$ en las dos variables:

$$\mathrm{Tor}_n^A(N,M) = H_n(N \underset{A}{\otimes} P(M)) \cong H_n(P(N) \underset{A}{\otimes} M) \cong H_n(P(N) \underset{A}{\otimes} P(M))$$

- Cálculo de algunas resoluciones funtoriales ($P(-)$: A-Mod$\to$ Chain(A))

3. El funtor $\otimes$ y su funtor derivado: Tor

Definición 3.1. M_A es playo si $M \underset{A}{\otimes} -$ preserva monomorfismos.

Observación 3.2. M playo $\iff M \underset{A}{\otimes} -$ preserva s.e.c. ($\iff M \underset{A}{\otimes} -$ preserva exactitud)

Proposición 3.3. *M_A es playo* $\Leftrightarrow \mathrm{Tor}_n^A(M,-) \equiv 0\ \forall n \geq 1 \Leftrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M,-) \equiv 0$

$\Rightarrow\Rightarrow$) dado ${}_AN$, encontramos $P_\bullet \to N$ resolución, $\Rightarrow M \otimes_A P_\bullet$ es exacto donde $P_\bullet$ lo es $\Rightarrow \mathrm{Tor}_n(M,N) = 0\ \forall n \geq 1$, y en particular para $n = 1$.

$\Leftarrow$) Si $f : N \to N'$ es mono, $\Rightarrow 0 \to N \xrightarrow{f} N' \to Coker(f) \to 0$ es una s.e.c. y utilizandola s.e. larga

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^A(M, Coker(f)) \to M \underset{A}{\otimes} N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}} M \underset{A}{\otimes} N' \to M \underset{A}{\otimes} Coker(f) \to 0$$

y concluimos que $f \otimes \mathrm{Id}$ es mono porque $\mathrm{Tor}_1 = 0$.

Observación 3.4. Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ s.e.c. $\Rightarrow \forall N$ tenemos una s.e.larga

$$Tor_2^A(M'',N) \to \mathrm{Tor}_1^A(M',N) \to \mathrm{Tor}_1^A(M,N) \to \mathrm{Tor}_1^A(M'',N) \to M \underset{A}{\otimes} N$$

Concluimos que la playitud tiene el sigueinte comportamiento:

M'', M playos $\Rightarrow M'$ también,

M', M'' playos $\Rightarrow M$ también, sin embargo

si M', M son playos, no está claro que M'' lo sea necesariamente: Ejercicio: encontrar contraejemplo.

Observamos también que $\exists$ playos no proyectivos, e.g. $\mathbb{Q}$ no es $\mathbb{Z}$-proyectivo, pues no es libre!

Límites filtrantes

Un poset $(I, \leq)$ se dice filtrante $\Leftrightarrow \forall i,j \in I\ \exists k : i,j \leq k$

Ejemplo 3.5. Todo $M \in A$-Mod es límite filtrante de sus submódulos f.g.

Lema 3.6. *(Ejercicio adicional guiado para el hogar)*
en un límite **filtrante** *(de A-módulos)*

1) $\omega \in \varinjlim_{I} M^i \Rightarrow \exists i_0 : \omega \in Im(M^{i_0} \to \varinjlim_{I} M^i)$

2) $m \in M^{i_0}$, $m \mapsto 0 \in \varinjlim_{I} M^i \Rightarrow \exists j \geq i_0 : m \mapsto 0 \in M^j$.

$$\begin{tikzcd}
m \arrow[dr, mapsto] \arrow[rrrr, mapsto, bend left] & M_0^i \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\iota_{i\leq j}"'] & & \varinjlim_{I} M^i & 0 \\
& 0 & M^j \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

Observación 3.7. si (M^i, d^i) es un sistema directo de complejos, tomando homología tenemos otro sistema directo y flechas

$$\begin{tikzcd} M^j \arrow[r] \arrow[d, "j\leq k"'] & \lim\limits_{\to} M^i \\ M_k \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} H_n(M^j) \arrow[r] \arrow[d, "j\leq k"'] & H_n(\lim\limits_{\to} M^i) \\ H_n(M_k) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

por lo tanto hay una flecha natural entre el límite de las homologías y la homología del límite $\lim\limits_{\to} H_n(M^i) \to H_n(\lim\limits_{\to} M^i)$.

Proposición 3.8. *si $(I, \leq)$ es filtrante entonces el morfismo anterior es un iso*

$$\lim_{\to} H_n(M^i) \cong H_n\big(\lim_{\to} M^i\big)$$

Demostración. $\omega \in \lim\limits_{\to} M^i$, $\Rightarrow \omega$ viene de un $m \in M^i$ (y por lo tanto $d\omega$ viene de dm). Si además $0 = d\omega \Rightarrow d(m) = 0$ en algun M^j con $j \geq i$.

$\Rightarrow \lim\limits_{\to} Z(M^i) \to Z\Big(\lim\limits_{\to} M^i\Big)$ es epi.

$$M^j \ni \iota_{i\leq j}(m) \mapsto \omega$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\to} H(M^i) \to H\Big(\lim\limits_{\to} M^i\Big)$ es epi.

Si $\lim\limits_{\to} H(M^i) \ni [\eta] \mapsto 0 \in H\Big(\lim\limits_{\to} M^i\Big)$

$[\eta]$ viene de un $[m] \in H(M^i)$, y $[m] \mapsto 0$ en $H\Big(\lim\limits_{\to} M^i\Big)$; entonces $[m]$ va a parar a alguien que es $d(\mu)$, pero μ viene de un m' en M^j.

Existe algún $k \geq i, j$ / m y m' están en M^k, y $m - dm'$ va a parar a cero en $\lim\limits_{\to} M^i$. Entonces, en algun M^ℓ van a parar a cero, luegoentonces

$$[m] = 0 \in H(M^\ell)$$

Concluimos que $\lim\limits_{\to} H(M^i) \to H\Big(\lim\limits_{\to} M^i\Big)$ es inyectiva. □

Corolario 3.9. Tor *conmuta con límites filtrantes*

Demostración. Si $(I, \leq)$ es filtrante y $(\{M^i\}_{i\in I}, \{\iota_{i\leq j}\})$ es un sistema directo de A-módulos indexado por $(I, \leq)$, para calcular $\mathrm{Tor}_n^A\Big(\lim\limits_{\to I} M_i, N\Big)$ resolvemos N

$$Q_\bullet \to N \to 0$$

Entonces

$$\mathrm{Tor}_n^A\Big(\lim_{\to I} M_i, N\Big) = H_n\Big((\lim_{\to I} M_i) \otimes_A Q_\bullet\Big)$$

como $- \otimes_A Q$ conmuta con limites directos arbitrarios

$$\cong H_n\Big(\lim_{\to I}(M_i \otimes_A Q_\bullet)\Big) \cong \lim_{\to I} H_n(M_i \otimes_A Q_\bullet) = \lim_{\to I} Tor_n^A(M_i \otimes_A, N)$$

□

Recordamos M playo $\iff$ $\mathrm{Tor}_1^A(M,N) = 0$ para todo N, a partir de lo anterior podemos mejorar esta caracterización:

Corolario 3.10. *M playo $\iff$ $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = 0\ \forall I \subset A$ ideal a izquierda.*

Demostración. $\Leftarrow$): Cambiando A/I por otro módulo isomorfo, asumimos $\mathrm{Tor}_1^A(M,N) = 0$ para todo N cíclico.

Sea N f.g., $N = \langle x_1, \dots, x_k\rangle$. Se tiene una s.e.c.

$$0 \to \langle x_1\rangle \to N \to N/\langle x_1\rangle \to 0$$

Notar

$$N/\langle x_1\rangle = \langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k\rangle = \langle \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k\rangle$$

se puede generar con $k-1$ elementos. Como $N = \langle x_1\rangle \cong A/I$, tenemos que

$\mathrm{Tor}_1^A(M, \langle x_1\rangle) = 0$ por hipótesis

$\mathrm{Tor}_1^A(M, N/\langle x_1\rangle) = 0$ por hipótesis inductiva

$\Rightarrow Tor_1^A(M,N) = 0$ por la s.e.larga

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^A(M, \langle x_1\rangle) \to \mathrm{Tor}_1^A(M,N) \to \mathrm{Tor}_1^A(M, N/\langle x_1\rangle) \to \cdots$$

$\boxed{\therefore Tor_1^A(M,N) = 0\ \forall N \text{ f.g.}}$

Si N es arbitrario $\Rightarrow N = \varinjlim N'$ con $N' \subseteq N$ f.g. es filtrante, luego

$$\mathrm{Tor}_1^A(M,N) = \mathrm{Tor}_1^A(M, \varinjlim N') = \varinjlim \mathrm{Tor}_1^A(M,N') = \varinjlim 0 = 0$$

□

Tor y torsión

Ejemplo 3.11. $x \in A$ sin torsión a izquierda ($ax = 0 \Rightarrow a = 0$), $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/Ax)$ se calcula por:

Resolvemos $N = A/Ax$ via $0 \to A \xrightarrow{\cdot x} A \to N \to 0$, luego

$$\mathrm{Tor}_\bullet^A(M,N) = H_\bullet\Big(M \otimes_A (0 \to A \xrightarrow{\cdot x} A \to 0)\Big)$$

$$\cong H_\bullet\Big(0 \to M \to^{\cdot x} M \to 0\Big)$$

$\Rightarrow \mathrm{Tor}_1(M, A/Ax) = M^x = \{m : mx = 0\}$= x-torsión de M. Si M es playo y A íntegro $\Rightarrow M$ no puede tener torsión.

Ejemplo 3.12. Si A es dip, entonces M playo $\iff$ M no tiene torsión.

3.1. Complejos dobles y Tor derivando la otra variable

Introducimos la herramienta de los complejos dobles, interesante en sí misma, la aplicaremos para ver que da lo mismo calcular $\mathrm{Tor}_A(M, N)$ resolviendo a M, o a N (o a ambos a la vez).

Definición 3.13. Un **complejo doble** de A-módulos $M = (M_{\bullet\bullet}, d_h, d_v)$ es un objeto bigraduado con dos diferenciales que anticonmutan:

$$M = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} M_{p,q}$$

con diferenciales "horizontales y verticales" d_h y d_v:

$$d_h : M_{p,q} \to M_{p,q-1},\ d_v^2 = 0$$

$$d_v : M_{p,q} \to M_{p-1,q},\ d_h^2 = 0$$

$$d_v d_h + d_h d_v = 0$$

Gráficamente lo representamos como

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
{} & M_{2,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
{} & M_{1,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
{} & M_{0,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{0,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{0,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{0,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
{} & M_{-1,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & M_{-1,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & M_{-1,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & M_{-1,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & {} \arrow[l] \\
 & {} & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Los complejos dobles forman una categoría de manera natural definiendo como morfismos los morfismos bigraduados que conmutan con d_v y d_h.

Observación 3.14. El núcleo y conucleo de un morfismo bigraduado resultan naturalmente bigraduados, y el núcleo y conucleo de un morfismo de complejos dobles son también complejos dobles.

Definición 3.15. (Complejo total asociado: la diagonal) Dado un complejo doble, se define el complejo **total** como

$$Tot(M_{\bullet\bullet})_n := \bigoplus_{p+q=n} M_{p,q}$$

con diferencial:

$$d_{Tot}(m_{p,q}) = d_v m + d_h m \in Tot(M)_{p+q-1}$$

Gráficamente:

$$
\begin{tikzcd}
Tot_1 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
{} & M_{2,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
-1 & M_{1,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
{} & M_{0,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{0,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{0,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{0,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
{} & M_{-1,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & M_{-1,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & M_{-1,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & M_{-1,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & {} \arrow[l] \\
 & {} & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}
$$

Definición 3.16. Decimos que $0 \to M_{\bullet\bullet} \to^{f} N_{\bullet\bullet} \to^{g} R_{\bullet\bullet} \to 0$ es una s.e.c. de complejos dobles si f y g son morfismos de compejos dobles y todo p, q

$$0 \to M_{p,q} \xrightarrow{f} N_{p,q} \xrightarrow{g} R_{p,q} \to 0$$

es una s.e.c. de A-módulos.

Ejercicio: un s.e.c. de complejos dobles determina una s.e.c. de complejos usuales

$$0 \to Tot(M_{\bullet\bullet}) \xrightarrow{f} Tot(N_{\bullet\bullet}) \xrightarrow{g} Tot(R_{\bullet\bullet}) \to 0$$

Como consecuencia inmediata tenemos:

Corolario 3.17. *Una s.e.c. de complejos dobles* $0 \to M_{\bullet\bullet} \to^{f} N_{\bullet\bullet} \to^{g} R_{\bullet\bullet} \to 0$ *induce una s-e-larga en la homologí de sus totales.*

Una clase importante de coplejos dobles son los que estan soportados en algún cuadrante. Por ejemplo, si un complejo tiene componentes eventualmente no nulas en posición:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
M_{2,0} \arrow[d, "d_v"] & M_{2,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
M_{1,0} \arrow[d, "d_v"] & M_{1,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
M_{0,0} & M_{0,1} \arrow[l, "d_h"'] & M_{0,2} \arrow[l, "d_h"'] & {} \arrow[l, "d_h"']
\end{tikzcd}
$$

se denomina un **complejo doble en el primer cuadrante**. El resultado más importante sobre complejos dobles que utilizaremos es el siguiente:

Lema 3.18. *Si* $M_{\bullet\bullet}$ *está en el primer cuadrante y sus columnas son exactas* $\Rightarrow Tot(M_{\bullet\bullet})$ *es exacto.*

Demostración. Haremos una demostración gráfica. Supongams primero que el complejo tiene una cantidad finita de columnas:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \cdots & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\
\bullet & \bullet \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

en caso de haber una sola columna, el resultado es obvio. Si no, podemos considerar una s.e.c. de complejos dobles que representamos esquemáticamente de la sigueinte forma:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
{} \arrow[d] & {} \arrow[d, dotted] & \cdots & {} \arrow[d, dotted] & {} \arrow[d, dotted] \\
\bullet \arrow[d] & \circ \arrow[l, dotted] \arrow[d, dotted] & \cdots \arrow[l, dotted] & \circ \arrow[l, dotted] \arrow[d, dotted] & \circ \arrow[l, dotted] \arrow[d, dotted] \\
\bullet \arrow[d] & \circ \arrow[l, dotted] \arrow[d, dotted] & \cdots & \circ \arrow[l, dotted] \arrow[d, dotted] & \circ \arrow[l, dotted] \arrow[d, dotted] \\
\bullet \arrow[d] & \circ \arrow[l, dotted] \arrow[d, dotted] & \cdots & \circ \arrow[l, dotted] \arrow[d, dotted] & \circ \arrow[l, dotted] \arrow[d, dotted] \\
\bullet \arrow[d] & \circ \arrow[l, dotted] \arrow[d, dotted] & \cdots & \circ \arrow[l, dotted] \arrow[d, dotted] & \circ \arrow[l, dotted] \arrow[d, dotted] \\
\bullet & \circ \arrow[l, dotted] & \cdots & \circ \arrow[l, dotted] & \circ \arrow[l, dotted]
\end{tikzcd}
\to
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \cdots & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\
\bullet & \bullet \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l]
\end{tikzcd}
\to
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
{} \arrow[d, dotted] & {} \arrow[d] & \cdots & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
\circ \arrow[d, dotted] & \bullet \arrow[l, dotted] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\
\circ \arrow[d, dotted] & \bullet \arrow[l, dotted] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\
\circ \arrow[d, dotted] & \bullet \arrow[l, dotted] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\
\circ \arrow[d, dotted] & \bullet \arrow[l, dotted] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\
\circ & \bullet \arrow[l, dotted] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

donde vemos que la primera columna es un subcomplejo, y que el complejo cociente se identifica al complejo al que se le ha borrado la primera columna y eliminado los diferenciales que figuran punteados en el diagrama.

Recursivamente, el complejo de la derecha es exacto pues sigue teniendo sus columnas exactas y tiene una cantidad menor de columns que el del medio. El resultado se sigue entonces de la s.e.larga.

Si ahora un complejo del primer cuadrante tiene una cantidad arbitraria de columnas no nulas, observamos que al calcular $H_n(Tot(C_{\bullet\bullet})$ sólo intervienen las primeras n+1 columnas en el cálculo por lo que podemos considerar que el cálculod e H_n lo realizamos en el subcomplejo de las primeras n+1 columns, y éste es acíclico porque tiene uan cantidad finita de columnas. $\square$

Observación 3.19. Un resultado análogo es válido intercambiando, en ls hipótesis, filas por columnas.

Aplicación: Tor derivando la otra variable

Sean

$$\cdots \to Q_2 \to Q_1 \to Q_0 \xrightarrow{\epsilon} {}_AN \to 0$$

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\eta} M_A \to 0$$

y consideramos el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \\
N \otimes_A P_3 \arrow[d] & Q_0 \otimes_A P_3 \arrow[d] & Q_1 \otimes_A P_3 \arrow[l] \arrow[d] & Q_2 \otimes_A P_3 \arrow[l] \arrow[d] & \arrow[l] \\
N \otimes_A P_2 \arrow[d] & Q_0 \otimes_A P_2 \arrow[d] & Q_1 \otimes_A P_2 \arrow[l] \arrow[d] & Q_2 \otimes_A P_2 \arrow[l] \arrow[d] & \arrow[l] \\
N \otimes_A P_1 \arrow[d] & Q_0 \otimes_A P_1 \arrow[d] & Q_1 \otimes_A P_1 \arrow[l] \arrow[d] & Q_2 \otimes_A P_1 \arrow[l] \arrow[d] & \arrow[l] \\
N \otimes_A P_0 & Q_0 \otimes_A P_0 & Q_1 \otimes_A P_0 \arrow[l] & Q_2 \otimes_A P_0 \arrow[l] & \arrow[l] \\
 & Q_0 \otimes_A M & Q_1 \otimes_A M \arrow[l] & Q_2 \otimes_A M \arrow[l] & \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Si consideramos el complejo doble junto con la columna de la izquierda + el agregado del diferencial dado por la flecha ϵ, sus filas son exactas (porque se tensoriza con proyectivos, que son playos), por lo tanto el total es acíclico. Pero, a menos de suspensión, ese total coincide con el cono de la plicación inducida por ϵ. Esto dice que el morfismo $\epsilon \otimes \mathrm{Id}_{P_\bullet}$ es un quasi-isomorfismo. De manera análoga, el cono del morfismo $\mathrm{Id}_{Q_\bullet} \otimes \eta$ nos da el complejo doble "completado" con la fila de abajo con M, que tiene columnas acíclicas (pues vienen de tensorizar con los Q que son proyectivos, luego playos), por lo tanto (total de) el complejo doble también es quasi-isomorfo al complejo dado por la fila de abajo. Concluimos que la homología de la columna de la izquierda es isomorfa a l homología de la fila de bajo. Es decir,

$$H_\bullet(N \otimes_A P_\bullet) \cong H_\bullet(tot(Q_\bullet \otimes_A P_\bullet)) \cong H_\bullet(Q_\bullet \otimes_A M)$$

3.2. La fórmula de Kunneth

Relacionaremos, para dos complejos (X_A, d), $({}_AY, d)$ en situación favorable, la homología del producto tensorial con el producto tensorial de sus homologías. Primero observamos que si

$dx = 0$, $dy = 0$ entonces $d(x \otimes y) = 0$.

$dx = 0$, $y = dy' \Rightarrow x \otimes y = x \otimes dy' = \pm d(x \otimes y')$

$x = dx'$, $dy = 0 \Rightarrow x \otimes y = dx' \otimes y = d(x \otimes y')$

$\therefore$ está bien definida $H_pX \times H_qY \to H_{p+q}(X \otimes_A Y)$, es bilineal y balanceada, por lo tanto, para cada n $\exists$ flecha natural

$$\bigoplus_{p+q=n} H_pX \underset{A}{\otimes} H_qY \to H_n(X \underset{A}{\otimes} Y)$$

Puede ser un iso en general? No!!! Si $X_\bullet = P_\bullet(M)$ es una resolución de un módulo M, $X_\bullet$ es exacto salvo en 0, y si $Y = N$ (un módulo visto como complejo concentrado en grado cero), tambien es exacto salvo en 0, pero $X \otimes_A Y = P(M) \otimes_A N$ calcula $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$!

A veces es un iso? sí, a veces:

Teorema 3.20. *(Fórmula de Künneth) Supongamos $\forall n$ $B(X)_n$ es proyectivo y $Z(X)_n$ es playo. Entonces el morfismo natural anterior está en una s.e.c.*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_pX \underset{A}{\otimes} H_qY \longrightarrow H_n\Big(X \underset{A}{\otimes} Y\Big) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^A(H_pX, H_qY) \longrightarrow 0$$

Ejemplo 3.21. $A = k$ un cuerpo $\Rightarrow$ el morfismo natural es un iso.

Ejemplo 3.22. $A = \mathbb{Z}$ (o un dip) y X_n libre $\forall n$ (e.g. X= el grupo abeliano libre en un conjunto simplicial) $\Rightarrow$ $B_n(X)$ y $Z_n(X)$ son libres $\forall n$ (sobre un dip, submódulo de un libre es libre) $\Rightarrow$ vale la fórmula de Künneth.

Ejemplo 3.23. Existen morfismos (Eilenberg-Zilber) $C_\bullet^{sing}(X \times Y) \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} C_\bullet^{sing}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C_\bullet^{sing}(Y)$, $FG = \mathrm{Id}$, $GF \sim \mathrm{Id}$. Por lo tanto, la fórmula de Künneth implica, en el caso $A = \mathbb{Z}$, una relación entre la homología singular del producto cartesiano de espacios topológicos y el producto tensorial de sus homologías.

Ejemplo 3.24. Sea k un anillo conmutativo, y consideramos

$$0 \to k[x] \xrightarrow{x} k[x] \to k \to 0$$

es exacto, y los submódulos de ciclos y bordes son o bien cero, o bien libres. Llamando $X = (0 \to k[x]e_1 \xrightarrow{d} k[x] \to 0)$ ($k[x]$ en grados 0 y 1, $d(e_1) = x$), entonces

$$H_1(X) = 0,\ H_0(X) = k$$

y en X también los ciclos y bordes son o bien 0 o bien k-libres, por lo tanto se puede tensorizar con X y usar la fórmula de Künneth. Pero más aún, como $H_\bullet(X)$ es o bien cero o bien k-libre, el término de Tor_1 es cero, y la fórmula de Künneth da un isomorfismo

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes_k H_q(Y) \cong H_n(X \otimes_k Y)$$

para cualquier complejo de k-módulos Y. Si tomamos $Y = (0 \to k[y]e_2 \xrightarrow{y} k[y] \to 0)$ entonces

$$X \otimes Y \cong 0 \to k[x,y]e_1e_2 \to k[x,y]e_1 \oplus k[x,y]e_2 \to k[x,y] \to 0$$

$$d(e_1e_2) = xe_1 - ye_2,\ d(e_1) = x,\ d(e_2) = y$$

Resulta un complejo exacto en grados positivos en con homología k en grado cero, luego, este complejo nos da una resolución $k[x,y]$-libre de k.

Observación 3.25. Un argumento inductivo provee de una resolución de k como $k[x_1, \dots, x_n]$-módulo que estudiaremos más tarde, llamada la resolución de Koszul.

Ejemplo 3.26. Sean A y B dos k-álgebras y supongamos k cuerpo. Consideremos M_A, ${}_AN$ M'_B, ${}_BN'$, entonces ($\otimes = \otimes_k$)

$M \otimes M'$ es un $A \otimes B$-modulo a derecha,

$N \otimes N'$ es un $A \otimes B$-modulo a izquierda, y

$$\mathrm{Tor}_\bullet^{A\otimes B}(M \otimes M', N \otimes N') = \mathrm{Tor}_\bullet^A(M, N) \otimes \mathrm{Tor}_\bullet^B(M', N')$$

Demostración. Ejercicio 1) $P_\bullet \to M$, $P'_\bullet \to M'$ dos resoluciones, entonces $P \otimes P'$ resuelve a $M \otimes M'$ (usamos Künneth),

Ejercicio 2)

$$(P \otimes P') \underset{A\otimes B}{\otimes} (N \otimes N') \cong (P \underset{A}{\otimes} N) \otimes (P' \underset{B}{\otimes} N')$$

$$(p \otimes p') \underset{A\otimes B}{\otimes} (n \otimes n') \leftrightarrow (p \underset{A}{\otimes} n) \otimes (p' \underset{B}{\otimes} n')$$

Ejercicio 3)

$$H_\bullet\Big((P \underset{A}{\otimes} N) \otimes (P' \underset{B}{\otimes} N')\Big) \cong H_\bullet(P \underset{A}{\otimes} N) \otimes H_\bullet(P' \underset{B}{\otimes} N')$$

$\square$

Teorema 3.27. *(Fórmula de Künneth) Supongamos $\forall n$ $B(X)_n$ es proyectivo y $Z(X)_n$ es playo. Entonces el morfismo natural anterior está en una s.e.c.*

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_pX \underset{A}{\otimes} H_qY \to H_n(X \underset{A}{\otimes} Y) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^A(H_pX, H_qY) \to 0$$

Demostración. Sea X un complejo, $H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$

$$0 \to (Z(X), 0) \xrightarrow{i} (X, d) \xrightarrow{d} B(X)[-1] \to 0$$

es sec de complejos. $\forall p$

$$0 \longrightarrow Z_p(X) \xrightarrow{i} X_p \xrightarrow{d} B_{p-1}(X) \longrightarrow 0$$

es s.e.c. de A-módulos (a derecha)

Como supusimos $B_n(X)$ proyectivo $\forall n \Rightarrow$ (lugar a lugar) se parte. Si $Y_\bullet$ es un complejo (de A-mod a izq) $\Rightarrow \forall q$

$$0 \longrightarrow Z_p(X) \otimes Y \xrightarrow{i\otimes \mathrm{Id}_Y} X_p \otimes Y \xrightarrow{d_X \otimes \mathrm{Id}_Y} B_{p-1}(X) \otimes Y \longrightarrow 0$$

es exact y también

$$0 \longrightarrow (Z(X) \otimes Y)_n \xrightarrow{i} (X \otimes Y)_n \xrightarrow{d_X \otimes \mathrm{Id}_Y} (B(X) \otimes Y)_{n-1} \longrightarrow 0$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (Z(X) \otimes Y)_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "d", "\pm\mathrm{Id}\otimes d_Y ="'] & (X \otimes Y)_n \arrow[r, "d_X\otimes \mathrm{Id}_Y"] \arrow[d, "d"'] & (B(X) \otimes Y)_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pm\mathrm{Id}\otimes d_Y", "d="'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (Z(X) \otimes Y)_{n-1} \arrow[r, "i"] & (X \otimes Y)_{n-1} \arrow[r, "d_X\otimes \mathrm{Id}_Y"] & (B(X) \otimes Y)_{n-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Concluimos una s.e.c. de complejos

$$0 \longrightarrow Z(X) \otimes Y \xrightarrow{i} X \otimes Y \xrightarrow{d_X \otimes \mathrm{Id}_Y} B(X) \otimes Y[-1] \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ s.e. larga en homología

$$\cdots \to H_{n+1}(Z(X) \otimes Y) \to H_{n+1}(X \otimes Y) \to H_{n+1}(B(X) \otimes Y[-1]) \to$$

$$\to H_n(Z(X)\otimes Y)\to H_n(X\otimes Y)\to H_n(B(X)\otimes Y[-1])\to\cdots$$

$$\cdots\to H_{n+1}(Z(X)\otimes Y)\to H_{n+1}(X\otimes Y)\to H_{n+1}(B(X)[-1]\otimes Y)\to$$
$$\to H_n(Z(X)\otimes Y)\to H_n(X\otimes Y)\to H_n(B(X)[-1]\otimes Y)\to$$

Obervamos: para $W=Z$ ó B

$$H_n(W\otimes Y)=\bigoplus_p H_{n-p}(W_p\otimes Y)$$

y si Z es playo (B era proyectivo, luego playo también), para $W=Z$ ó B

$$H_n(W\otimes Y)=\bigoplus_p W_p\otimes H_{n-p}(Y)=(W\otimes H(Y))_n$$

Tambien es claro que $H_{n+1}(B(X)\otimes Y[-1])=H_n(B(X)\otimes Y)$.
la suc.

$$\cdots\to H_{n+1}(Z(X)\otimes Y)\to H_{n+1}(X\otimes Y)\to H_{n+1}(B(X)\otimes Y[-1])\to$$

$$\to H_n(Z(X)\otimes Y)\to H_n(X\otimes Y)\to H_n(B(X)[-1]\otimes Y)\to$$

queda

$$\cdots\to\bigoplus_p B_p\otimes H_{n-p}(Y)\to$$

$$\to\bigoplus_p Z_p\otimes H_{n-p}(Y)\to H_n(X\otimes Y)\to\bigoplus_p B_p\otimes H_{n-1-p}(Y)\to$$

$$\to\bigoplus_p Z_p\otimes H_{n-1-p}(Y)\to\cdots$$

como tensorizar es exacto a derecha, el conúcleo de

$$\bigoplus_p B_p\otimes H_{n-p}(Y)\to\bigoplus_p Z_p\otimes H_{n-p}(Y)$$

es $\bigoplus_p H_p(X)\otimes H_{n-p}(Y)$ por lo tanto, la sucesión

$$\bigoplus_p B_p\otimes H_{n\text{-}p}(Y)\to\bigoplus_p Z_p\otimes H_{n\text{-}p}(Y)\to H_n(X\otimes Y)\to\bigoplus_p B_p\otimes H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y)\to\bigoplus_p Z_p\otimes H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y)$$

nos da

$$0\to\bigoplus_p H_p(X)\otimes H_{n\text{-}p}(Y)\to H_n(X\otimes Y)\to\bigoplus_p B_p\otimes H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y)\to\bigoplus_p Z_p\otimes H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y)$$

A su vez, la imagen de la segunda flecha, es el núcleo de

$$\bigoplus_p B_p\otimes H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y)\to\bigoplus_p Z_p\otimes H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y)$$

Para calcular este núcleo, considermos la s.e.c.

$$0 \to B_p \to Z_p \to H_p(X) \to 0$$

que, al tensorizar con $H_q(Y)$ da la s.e.l.

$$\mathrm{Tor}_1(Z_p(X), H_q(Y)) \to \mathrm{Tor}_1(H_p(X), H_q(Y)) \to B_p \otimes H_q(Y) \to Z_p \otimes H_q(Y) \to H_p(X) \otimes H_q(Y) \to 0$$

pero como habíamos supuest Z_p playo,

$$\mathrm{Tor}_1(H_p(X), H_q(Y)) = \mathrm{Ker}(B_p \otimes H_q(Y) \to Z_p \otimes H_q(Y))$$

luego

$$\bigoplus_p \mathrm{Tor}_1(H_p(X), H_{n\text{-}p}(Y)) = \mathrm{Ker}\Big(\bigoplus_p B_p \otimes H_{n\text{-}p}(Y) \to \bigoplus_p Z_p \otimes H_{n\text{-}p}(Y)\Big)$$

$\Rightarrow$

$$0 \to \bigoplus_p H_p(X) \otimes H_{n\text{-}p}(Y) \to H_n(X \otimes Y) \to \bigoplus_p \mathrm{Tor}_1(H_p(X), H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y)) \to 0$$

es una s.e.c. También la podemos re-escribir como

$$0 \to (HX \otimes HY)_n \to H_n(X \otimes Y) \to \bigoplus_p \mathrm{Tor}_1(H_pX, H_{n\text{-}1\text{-}p}Y) \to 0$$

$\square$

Casos particulares:

Si $A = k$ es un cuerpo, entonces

$$H_\bullet(X) \otimes H_\bullet(Y) \cong H_\bullet(X \otimes Y)$$

En general, si A es arbitrario y si (BX proy, ZX playo y) o bien $H(X)$, o bien $H(Y)$ playo $\Rightarrow$

$$H_\bullet(X) \underset{A}{\otimes} H_\bullet(Y) \cong H_\bullet(X \underset{A}{\otimes} Y)$$

Un caso de interés topológico: cuando se calcula el complejo singular de un espacio topológico V, $S_\bullet(V, A)$=A-módulo libre en los símplices en V,

$$H_\bullet^{sing}(V, A) := H_\bullet(S_\bullet(V, A))$$

Es claro que

$$S_\bullet(V, A) = S_\bullet(V, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

y $X = S_\bullet(V, \mathbb{Z})$, $B(X)$ y $Z(X)$ son $\mathbb{Z}$-libres. $Y = A$, $H_\bullet(Y) = H_0(Y) = A$.

Llamemos $H_nV := H_n^{sing}(V, \mathbb{Z})$, entocnes existe s.e.c.

$$0 \to H_nV \otimes_{\mathbb{Z}} A \to H_n^{sing}(V, A) \to Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}V, A) \to 0$$

x.ej. si $H_n(V)$ tiene p-torsión $\Rightarrow H_{n+1}^{sing}(V, \mathbb{Z}_p) \neq 0$.

3.3. Aplicación: resolución de Koszul para polinomios

Desarrollaremos el ejemplo 3.24. En est sección $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, $M = k$ (via evaluación en cero), es claro que

$$\mathrm{Ker}(ev_0 : A \to k) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} Ax_i$$

por lo tanto la siguiente es una sucesión exacta a derecha:

$$? \cdots \to \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i \to A \to k \to 0$$

$$e_i \mapsto x_i$$

Para cada $k \geq 0$ tomamos ($K_0 = A$) K_k^n el A-módulo libre de rango $\binom{n}{k}$, con base los símbolos $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ donde $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, y el diferencial dado por

$$d : K_k^n := \bigoplus_{i_1 < \cdots < i_k} Ae_{i_1} \cdots e_{i_k} \to K_{k-1}^n$$

$$\begin{aligned} e_{i_1} \cdots e_{i_k} &\mapsto x_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} - x_{i_2} e_{i_1} e_{i_3} \cdots e_{i_k} + \cdots \\ &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} x_{i_j} e_{i_1} \cdots \widehat{e_{i_j}} \cdots e_{i_k} \end{aligned}$$

Proposición 3.28. *(Resolución de Koszul) El complejo anterior da una resolución de k como A-módulo.*

Demostración. Notamos primero que el objeto recién definido termina de la siguiente forma:

$$\cdots \to \bigoplus_{i=1}^{n} k[x_1, \ldots, x_n]e_i \to k[x_1, \ldots, x_n] \to 0$$

y claramente

$$d\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} k[x_1, \ldots, x_n]e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i A = \langle x_1, \cdots x_n \rangle = \mathrm{Ker}(ev : A \to k)$$

por lo tanto el conúcleo de la última flecha es k. Para ver que es un complejo (i.e. $d^2 = 0$) y que en grados superiores es exacto, usamos la fórmula de Künneth para

$$X = 0 \to k[x]e_0 \stackrel{x_0}{\to} k[x_0] \to 0$$

que es un complejo con homología cero en grados positivos y $H_0 = k$, e

$$Y = K_\bullet^n$$

Mostraremos que $X_\bullet \otimes Y_\bullet \cong K_\bullet^{n+1}$ y así concluiremos la proposición por inducción usando la fórmula de Künneth, siendo el caso $n = 1$ el complejo X donde el enunciado es obvio.

Calculemos el producto tensorial de los complejos:

$$(X\otimes Y)_k=\bigoplus_{p+q=k}X_p\otimes K^n_q=X_0\otimes K^n_k\bigoplus X_1\otimes K^n_{k-1}$$

$$=k[x_0]\otimes\Big(\bigoplus_{i_1<\cdots<i_k}k[x_1,\dots,x_n]e_{i_1}\cdots e_{i_k}\Big)\bigoplus k[x_0]e_0\otimes\Big(\bigoplus_{i_1<\cdots<i_{k-1}}k[x_1,\dots,x_n]e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}\Big)$$

$$\cong\Big(\bigoplus_{i_1<\cdots<i_k}k[x_0,x_1,\dots,x_n]e_0\otimes e_{i_1}\cdots e_{i_k}\Big)\bigoplus\Big(\bigoplus_{i_1<\cdots<i_{k-1}}k[x_0,x_1,\dots,x_n]e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}\Big)$$

que claramente es isomorfo a K^{n+1}_k simplemente renombrando las variables desde 0 a n, y con la correspondencia

$$e_0\otimes e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}\leftrightarrow e_0e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}$$

Dejamos como ejercicio chequear que los diferenciales se corresponden, con todos sus signos incluidos. Concluimos que K^{n+1} es un complejo ($d^2=0$).

Como $X_\bullet$ tiene ciclos y bordes k-módulos libres, podemos usar la fórmula de Künneth

$$0\to(HX\otimes HY)_\ell\to H_\ell(X\otimes Y)\to\bigoplus_p\mathrm{Tor}_1(H_pX,H_{\ell-1-p}Y)\to 0$$

Pero como $H_\ell(X)=0$ si $\ell\neq 0$ y $H_0(X)=k$, el lado izquierdo de la s.e.c. es simplemente $k\otimes H_\ell(Y)$, mientras que el lado derecho, cuando $p\neq 0$

$$\mathrm{Tor}_1(H_pX,H_{\ell-1-p}Y)=\mathrm{Tor}_1(0,H_{\ell-1-p}Y)=0$$

y cuando $p=0$ también pues

$$\mathrm{Tor}_1(H_0X,H_{\ell-1}Y)=\mathrm{Tor}_1(k,H_{\ell-1}Y)=0$$

pues k es k-libre, luego playo. Concluimos

$$H_\ell(K^{n+1}_\bullet)\cong H_\ell(X_\bullet\otimes K^n_\bullet)\cong k\otimes H_\ell(K^n_\bullet)$$

y por hipótesis inductiva $H_\ell(K^n_\bullet)=0$ para $\ell>0$, y k para $\ell=1$. □

3.4. Exactitud en s.e.c. vs exactitud general

Proposición 3.29. *Sea F : A-Mod$\to\mathbb{Z}$-Mod que manda s.e.c. en s.e.c., entonces preserva exactitud.*

Demostración. Sea $Y\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}Z$ tal que $Im(f)=Ker(g)$. Consideramos

$$FY\xrightarrow{Ff}FX\xrightarrow{Fg}FZ$$

queremos ver que $Im(Ff)=\mathrm{Ker}(Fg)$. Observamos que como F es aditivo y $F(0)=0$, ya sabemos $Im(Ff)\subseteq\mathrm{Ker}(Fg)$.

Primero, vamos a reducir al caso g epi: Llamamos g^c (g co-retringda) a la "misma" g pero vista de Y en su imagen,

$$g^c : Y \to g(Y)$$

y llamemos $i : g(Y) \to Z$ a la inclusión.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, two heads, "g^c"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & Im(g) \arrow[r, hook, "i"] & FZ
\end{tikzcd}$$

Como F preserva monos y epis, siguen los monos y epis:

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F(f)"] & FY \arrow[r, two heads, "F(g^c)"] \arrow[rr, bend right, "F(g)"'] & F(Im(g)) \arrow[r, hook, "F(i)"] & FZ
\end{tikzcd}$$

y además $F(g) = F(i) \circ F(g^c)$. Como el diagrama conmuta y y $F(i)$ es mono

$$F(g)(u) = 0 \iff F(i)\Big(F(g^c)(u)\Big) = 0 \iff F(g^c)(u) = 0$$

Luego, $\mathrm{Ker}(F(g)) = \mathrm{Ker}(F(g^c)$.

Ahora volvemos a

$$FY \xrightarrow{Ff} FX \xrightarrow{Fg} FZ$$

y queremos ver si $Im(F(f)) = \mathrm{Ker}(F(g))$, pero esto es lo mismo que preguntarse si

$$Im(F(f)) = \mathrm{Ker}(F(g^c))$$

o equivalentemente, haber asumido desde el principio (cambiando eventualmente g por g^c) que g era epi.

Empecemos nuevamente entonces desde una sucesión exacta

$$Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

tal que $Im(f) = Ker(g)$ y consideremos el complejo

$$FY \xrightarrow{Ff} FX \xrightarrow{Fg} FZ \longrightarrow 0$$

Factorizando a $f = i \circ f^c$ donde $f^c : X \to f(X)$ y ahora $i : f(X) \to Y$ es la inclusión de $Im(f)$ en Y, tenemos el sgte diagrama

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, two heads] & & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[dd, equal] & F(Z) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& F(Im(f)) = F(\mathrm{Ker}(g)) \arrow[ur, hook, "F(i)"] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F(g)) \arrow[r] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $g \circ i = 0$ entonces $F(i) \circ F(g) = F(i \circ g) = 0$, es decir, $F(i)(F(\mathrm{Ker}(g))$ cae dentro del núcleo de $F(g)$, y tenemos una factorización de $F(i)$:

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, two heads] & & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[dd, equal] & F(Z) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& F(Im(f)) = F(\mathrm{Ker}(g)) \arrow[ur, hook, "F(i)"] \arrow[d, dashed] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F(g)) \arrow[r] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La flecha punteada claramente es mono, pero más aún, como $0 \to \mathrm{Ker}(g) \to^i Y \to^g Z \to 0$ es un s.e.c. y F preserva s.e.c., tenemos un morfismo de s.e.c. y (por el lema de los 5)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(\mathrm{Ker}(g)) \arrow[r, "F(i)"] \arrow[d, dashed] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, equal] & F(Z) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F(g)) \arrow[r, "\subseteq"] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

podemos concluir que la flecha punteada es un iso "$\cong$". Ahora que sabemos que es un iso, mirando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, two heads, "F(f^c)"'] & & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[dd, equal] & F(Z) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& F(Im(f)) = F(\mathrm{Ker}(g)) \arrow[ur, hook, "F(i)"] \arrow[d, dashed, "\cong"] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F(g)) \arrow[r] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

podemos ver que $Im(F(f)) = \mathrm{Ker}(F(g))$: si $F(g)(u) = 0$,

$$\cong^{-1}(u) \in F(Ker(f)) = F(Im(f)) = Im(F(f^c))$$

la última igualdad es porque F preserva epis. Entonces

$$\cong^{-1}(u) = F(f^c)(v)$$

para algún $v \in FX$. $\Rightarrow$

$$u = \cong(\cong^{-1}(u)) = \cong(F(f^c)(v)) = F(i)(F(f^c)(v)) = F(f)(v)$$

o sea, $u \in Im(F(f))$. $\square$

Núcleo e imagen categóricos

En una categoría donde $\mathrm{Hom}(M, N)$ es un grupo abeliano (y la composición es bilineal), existe siempre el morfismo cero. A su vez, se puede definir un objeto cero como un objeto que sea simultáneamente objeto inicial y final. En el caso que exista, claramente es único (a menos de isomorfismo único) y lo denotamos por 0. Si X, Y son dos objetos, por ser 0 inicial y final se tiene definida de forma única una flecha $X \to 0 \to Y$, a esta flecha la llamamos flecha cero. Definimos núcleo y conúcleo para categorías con objeto cero:

Núcleo: Dado $f : M \to N$, un núcleo para f es un par (K, i) donde K es un objeto, $i : K \to M$, $f \circ i = 0$ y es universal en el sentido: $\forall g : X \to M$ tal que $f \circ g = 0$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "f\circ i=0"] & M \arrow[r, "f"] & N \\ & X \arrow[u, "g"] \arrow[ul, dotted, "\exists!\widetilde{g}"] \arrow[ur, bend left, "f\circ g=0"'] & \end{tikzcd}$$

Conúcleo: conúcleo en $\mathcal{C}$ = núcleo en $\mathcal{C}^{op}$.

Ejemplo 3.30. si $f : M \to N$ es un morfismo en A-Mod,

$$\mathrm{Ker}(f) = \Big(\{m \in M : f(m) = 0\}, \subseteq\Big)$$

$$\mathrm{CoKer}(f) = \Big(N/Im(f), \pi : N \to N/Im(f)\Big)$$

Notación: Ker(f)= el objeto, $ker(f)$=la flecha. La factorización

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "f^c"'] & & N \arrow[r, two heads, "\pi"] & N/Im(f) \\ & Im(f) \arrow[ur, hook, "i"] & & \end{tikzcd}$$

nos dice $Im(f) = \mathrm{Ker}(coker(f)) \hookrightarrow N$

Definición 3.31. En una categoría se define $\boxed{Im(f) = \mathrm{Ker}(coker(f))}$.

Notar que no tiene sentido en una categoría arbitraria hablar de subobjeto "$X \subseteq Y$", pero si se puede hablar de un par (X, i) donde $i : X \to Y$.

3.5. El teorema de isomorfismo

En una categoría con núcleo y conúcleo, y en la que toda flecha $f : X \to Y$ tiene una factorización de un epi (en su "imagen") seguida de un mono (la "inclusión" de la imagen en el codominio), se puede considerar el siguiente diagrama, y en la categoría de A-módulos la flecha horizontal de abajo es un isomorfismo:

$$\begin{tikzcd} Ker(f) \arrow[r, hook] & M \arrow[rr, "f"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads, "f^c"] & & N \arrow[r, two heads, "\pi"] & N/Im(f) \\ & M/\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, hook, two heads, "\sim", "\overline{f^c}"'] & Im(f) \arrow[ur, hook, "i"] & & \end{tikzcd}$$

$$\boxed{Im(f) := \mathrm{Ker}(coker(f)) = \mathrm{Ker}\Big(N \xrightarrow{coker(f)} Coker(f)\Big) \hookrightarrow N}$$

Observación 3.32. "al revés", $Coker(ker(f)) = M/\mathrm{Ker}(f)$, y por el 1er teo de isomofrismo sabemos que $\cong Im(f)$

Este isomorfismo: $\mathrm{Ker}(coker(f)) \cong Coker(ker(f))$ vale en A-mod, también en Chain(A). Es uno de los axiomas de "categoría abeliana".

Observación 3.33. La homología de un complejo se define como "$\mathrm{Ker}(d)/Im(d)$", claramente es una concatenación de definiciones de nucleo y conúcleo (ver la definición de imagen!). Por lo tanto, tenemos el siguiente corolario, que lo enunciamos en A-módulos, pero que ahora sabemos qué hipotesis categóricas necesitaríamos para generalizarlo.

Corolario 3.34. *Si F : A-Mod$\to$ $\mathbb{Z}$-Mod preserva s.e.c. entonces F preserva núcleos, conúcleos, imagenes, conúcleos de núcleos por imágenes, y por lo tanto*

$$H_n(F(X_\bullet)) \cong F\Big(H_n(X_\bullet)\Big)$$

Para todo $X_\bullet \in$ Chain(A).

Ejemplo 3.35. M_A playo, entonces

$$H_n(M \otimes_A Y_\bullet) \cong M \otimes_A H_n(Y_\bullet)$$

para todo complejo de A-módulos $Y_\bullet$

4. El funtor Ext

Para $M, N \in A$-Mod, definimos el funtor Ext derivando al funtor Hom. Este funtor tiene la peculiaridad que es contravariante en la primer variable, y en la segunda variable es exacto a izquierda, y no a derecha. En todo caso, definimos

$$\mathrm{Ext}_A^n(M,N) := H^n(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N), d^*)$$

donde $P_\bullet \to M$ es una resolución proyectiva de M.

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d} \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d} P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0$$

$\rightsquigarrow \mathrm{Ext}_A^n(M,N) =$

$$= H^n\Big(0 \to \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_A(P_1,N) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_A(P_2,N) \xrightarrow{d^*} \cdots \Big)$$

es la (co)homología de un complejo de CO-cadenas. Está bien definido a menos de isomorfismo (único).

4.1. Primeras propiedades

Así como $\mathrm{Tor}_0^A(M,N) \cong M \otimes_A N$, tenemos para el Ext:

Proposición 4.1. $\mathrm{Ext}_A^0(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$

Demostración. $\mathrm{Ext}_A^0(M,N) = \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_A(P_1,N) \Big)$, pero $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ manda s.e. a derecha en s.e.a izq., luego "$X \to Y \to Z \to 0 \Rightarrow 0 \to \mathrm{Hom}_A(Z,N) \to \mathrm{Hom}_A(Y,N) \to \mathrm{Hom}_A(X,N)$"

En particular,

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_A(P_1,N)$$

es exacta, por lo que $\mathrm{Ker}(d^*) \cong \mathrm{Hom}_A(M,N)$. □

También vale que manda sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas largas:

Proposición 4.2. Ext *manda s.e.c. en sucesiones exactas largas. Más concretamente, si Si* $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ *es una s.e.c. de* A*-módulos, entonces se tiene una s.e.larga*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M_3,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M_2,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M_1,N) \arrow[dll, rounded corners] \\
& \mathrm{Ext}_A^1(M_3,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_A^1(M_2,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_A^1(M_1,N) \arrow[dll, rounded corners] \\
& \mathrm{Ext}_A^2(M_3,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_A^2(M_2,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_A^2(M_1,N) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración. Al igual que en el cálculo de Tor, si tomamos resoluciones de M_1 y M_3 y para M_2 tomamos la suma directa (en cada grado) de estas resoluciones y obtenemos una suesión exacta de los complejos. Concluios por la sucesión exacta larga en cohomología. □

Proposición 4.3. *$N = I$ es inyectivo* $\iff \operatorname{Ext}^n_A(M, I) = 0\ \forall n > 0$
$M = P$ es proyectivo $\Rightarrow \operatorname{Ext}^n_A(P, N) = 0\ \forall n > 0$.

Demostración. Si I es inyectivo entonces $\operatorname{Hom}_A(-, I)$ es exacto, luego, al aplicarlo una resolución de M, mantiene la exactitud y $\operatorname{Ext}^n_A(M, I) = 0$ para $n > 0$. Recíprocamente, si $\operatorname{Ext}^n_A(M, I) = 0$ para $n > 0$ para cualquier M, la s.e.larga nos dice que $\operatorname{Hom}_A(-, I)$ es exacto.

Si P es proyectivo, entonces

$$0 \to P \xrightarrow{\mathrm{Id}} P$$

es una resolución proyectiva de P. Si usamos ésta resolución, es claro que $\operatorname{Ext}^n_A(P, N) = 0$ par $n > 0$ y para cualquier N. Para la otra implicción sería conveniente tener la s.e.larga en la otra variable, que veremos enseguida. $\square$

4.2. Ext y sucesiones exactas

Ahora fijamos M y consideramos $0 \to N_1 \to N_2 \to N_1 \to 0$ es una s.e.c. de A-módulos, tenemos

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M, N_1) \to \operatorname{Hom}_A(M, N_2) \to \operatorname{Hom}_A(M, N_1)$$

Teorema 4.4. *La sucesion anterior se extiende a una s.e. larga de la forma*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(M, N_1) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(M, N_2) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(M, N_3) \arrow[dll, out=0, in=180, looseness=2] \\
& \operatorname{Ext}^1_A(M, N_1) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_A(M, N_2) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_A(M, N_3) \arrow[dll, out=0, in=180, looseness=2] \\
& \operatorname{Ext}^2_A(M, N_1) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^2_A(M, N_2) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^2_A(M, N_3) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración. resolvemos M

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

Tomamos el complejo $P_\bullet$

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0$$

Aplicamos $\operatorname{Hom}_A(-, N_i)$, $i = 1, 2, 3$ y tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(P_0, N_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \operatorname{Hom}_A(P_1, N_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \operatorname{Hom}_A(P_2, N_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(P_0, N_2) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \operatorname{Hom}_A(P_1, N_2) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \operatorname{Hom}_A(P_2, N_2) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(P_0, N_3) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(P_1, N_3) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(P_2, N_3) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

pero como P_i es proyectivo $\forall i$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_0, N_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \mathrm{Hom}_A(P_1, N_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \mathrm{Hom}_A(P_2, N_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_0, N_2) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \mathrm{Hom}_A(P_1, N_2) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \mathrm{Hom}_A(P_2, N_2) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_0, N_3) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(P_1, N_3) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(P_2, N_3) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\therefore\ 0 \to \mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N_3) \to 0$$

es una s.e.c. de complejos, luego, se tiene una s.e.larga en (co)homología □

Fijemos ahora una sucesión exacta corta $\forall(0 \to X \to Y \to Z \to 0)$ y considereos módulos P e I que los usaremos en cada una de las variables, tenemos dos opciones para s.e.largas:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P, X) \to \mathrm{Hom}_A(P, Y) \to \mathrm{Hom}_A(P, Z) \to \mathrm{Ext}^1_A(P, X) \to \cdots$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(Z, I) \to \mathrm{Hom}_A(Y, I) \to \mathrm{Hom}_A(X, I) \to \mathrm{Ext}^1_A(Z, I) \to \cdots$$

Concluimos ahora fácilmente que
P proyectivo $\iff \mathrm{Ext}^1_A(P, N) = 0\ \forall N$
I inyectivo $\iff \mathrm{Ext}^1_A(M, I) = 0\ \forall M$

Para el caso de inyectivos, recoramos el siguiente criterio, que traduciremos luego en términos de Ext:

Teorema 4.5 (criterio de Baer)**.** *$J \subset A$ ideal, I inyectivo* $\iff$

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\forall f"'] & A \arrow[dl, dotted, "\exists! \widetilde{f}"] \\
I &
\end{tikzcd}$$

Corolario 4.6. *I inyectivo* $\iff \mathrm{Ext}^1_A(A/J, I) = 0\ \forall$ *ideal* $J \subset A$

4.3. $\mathrm{Ext}^\bullet$ derivando la 2da variable:

De manera similar al $\mathrm{Tor}^A_\bullet(M, N)$, que lo podemos calcular usando una resolución proyectiva de M, o de N (o de ambos simultáneamente), en el caso del Ext la situación es análoga, aunque diferente porque Ext es contravariante en la primer variable, y exacto a izquierda en la segunda variable (y no a derecha como el producto tensorial), por eso, en la segunda variable, la buena definicón o constrcción es dual a la del producto tensorial, es decir, con resoluciones inyectivas en vez de proyectivas.

Dados M, N, tomamos

$$0 \to N \to I_0 \to I_{-1} \to I_{-2} \to I_{-3} \to \cdots$$

una resolución inyectiva.

Notación: $0 \to N \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to I^3 \to \cdots$

Se define $I_\bullet := \Big(0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to I^3 \to \cdots \Big)$

(con esa indexación es un compejo de CO-cadenas)

$$\widetilde{\operatorname{Ext}}^\bullet_A(M,N) := H^n(\operatorname{Hom}_A(M, I^\bullet))$$

Teorema 4.7. $\widetilde{\operatorname{Ext}}^\bullet_A(M,N) \cong \operatorname{Ext}^\bullet(M,N)$

Demostración. Consideramos una resolución proyectiva $P_\bullet \to M$ y el complejo **doble**

$$C_{ij} := \operatorname{Hom}_A(P_i, I^j)$$

con diferenciales los que vienen de $P_\bullet$ y los que vienen de $I^\bullet$ (con signos)

A partir de

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

y

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} P_2 \xrightarrow{\partial_1} P_1 \xrightarrow{\partial_0} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

se tiene

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\operatorname{Hom}_A(P_2,N) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[u, "\partial_2^*"] & \operatorname{Hom}_A(P_2,I^0) \arrow[r, "d_0"] \arrow[u, "-\partial_2^*"] & \operatorname{Hom}_A(P_2,I^1) \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "\partial_2^*"] & \operatorname{Hom}_A(P_2,I^2) \arrow[r, "d_2"] \arrow[u, "-\partial_2^*"] & \cdots \\
\operatorname{Hom}_A(P_1,N) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[u, "\partial_1^*"] & \operatorname{Hom}_A(P_1,I^0) \arrow[r, "d_0"] \arrow[u, "-\partial_1^*"] & \operatorname{Hom}_A(P_1,I^1) \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "\partial_1^*"] & \operatorname{Hom}_A(P_1,I^2) \arrow[r, "d_2"] \arrow[u, "-\partial_1^*"] & \cdots \\
\operatorname{Hom}_A(P_0,N) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[u, "\partial_0^*"] & \operatorname{Hom}_A(P_0,I^0) \arrow[r, "d_0"] \arrow[u, "-\partial_0^*"] & \operatorname{Hom}_A(P_0,I^1) \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "\partial_0^*"] & \operatorname{Hom}_A(P_0,I^2) \arrow[r, "d_2"] \arrow[u, "-\partial_0^*"] & \cdots \\
\operatorname{Hom}_A(M,N) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[u, "\epsilon^*"] & \operatorname{Hom}_A(M,I^0) \arrow[r, "d_0"] \arrow[u, "-\epsilon^*"] & \operatorname{Hom}_A(M,I^1) \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "\epsilon^*"] & \operatorname{Hom}_A(M,I^2) \arrow[r, "d_2"] \arrow[u, "-\epsilon^*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\operatorname{Ext}^\bullet_A(M,N) \to \widetilde{\widetilde{\operatorname{Ext}^\bullet}}_A(M,N) \leftarrow \widetilde{\operatorname{Ext}^\bullet}_A(M,N)$$

□

4.4. Ext y extensiones

$[f] \in \operatorname{Ext}^1(M,N)$, significa que hemos tomado una resolución proyectiva de M:

$$\cdots \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

y $f\in \mathrm{Hom}_A(P_1,N)$ es tal que $d^*f=0$, o sea, $f\circ d_1=0$, o bien $f|_{Imd_1}\equiv 0$. Esto dice que se puede armar un diagrama

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "d_1"] & P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\ & N & & & \end{tikzcd}$$

que se puede completar como

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\ N \arrow[r, "j"] & N\oplus_{P_1} P_0 & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\ N \arrow[r, "j"] & N\oplus_{P_1} P_0 & & \end{tikzcd}$$

donde $N\oplus_{P_1} P_0=(N\oplus P_0)/\langle (f(p),0)-(0,d(p)) : p\in P_1\rangle$ es el push-out

Afirmación: j es mono:

$$j(n)=\overline{(n,0)}=0 \iff \exists p:(n,0)=(fp,-dp)$$
$$\Rightarrow dp=0,\ \Rightarrow p=d_1(p_2)$$
$$\Rightarrow n=f(p)=f(d_1(p_2))=0$$

(pues $d_1^*f=0$)

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & N\oplus_{P_1} P_0 & & \end{tikzcd}$$

o bien, ya que $f|_{Im(d_1)}\equiv 0$,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_1/\mathrm{Ker}(d) \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\overline{f}"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & N\oplus_{P_1} P_0 & & \end{tikzcd}$$

Además, f tiene un conúcleo, por lo que podemos comparar dos s.e.c.:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_1/\mathrm{Ker}(d)f \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\overline{f}"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & N\oplus_{P_1} P_0 \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1/\mathrm{Ker}(d)f \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\overline{f}"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & N \oplus_{P_1} P_0 \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Afirmación: $M \cong C$:

Hecho general: encualquier diagrama del tipo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "j"] & p.out \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

siempre tendremos $C \cong M$.

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "p"] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & p.out \arrow[r, dotted] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "p"] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & p.out \arrow[r, dotted] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\overline{(0,y)} \mapsto p(y) \ \Rightarrow \ \text{epi}$$

$$\overline{(z,y)} \mapsto p(y) = 0 \Rightarrow y = i(x)$$

$$\Rightarrow \overline{(z,y)} = \overline{(z,i(x))} = \overline{(z-\phi(x),0)}$$

$$= j(z-\phi(x))$$

Concluimos que el núcleo de la flecha punteada es igual a $Im(j)$ y concluimos que la flecha

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "d_1"] & P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
& N & & &
\end{tikzcd}$$

determina un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1/\mathrm{Ker}(d)f \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\overline{f}"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & E_f \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

Supongamos ahora que tenemos una s.e.c.

$$0 \to N \to E \to M \to 0$$

y la comparamos con la resolucion:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_1"] & P_1 \arrow[r, "d_0"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El lema de levantamiento implica que lo podemos rellenar

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_1"] & P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y así obtener $f : P_1 \to N$ tal que $d_1^* f = 0$. Ademas el levantado es único a menos de homotopía,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_1"] & P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, shift right, "g_0"'] \arrow[d, shift left, "f_0"] \arrow[dl, dotted, "h"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es decir,

$$\exists h : P_0 \to N \text{ tal que } f - g = hd_0 + 0 = d_0^*(h)$$

$$\Rightarrow f - g \in d^*\Big(\mathrm{Hom}(P_0, N)\Big) \Rightarrow [f] = [g] \in \mathrm{Ext}_A^1(M, N)$$

De esta manera, podemos ver que a todo elemento de Ext^1 le podemos asignar una s.e.c. y reícprocamente a toda s.e.c. le corresponde un elemento de Ext^1. Para ver en qué sentido estras construcciones son reíprocas, damos la siguiente definición:

Definición 4.8. (relalción de equivalenci entre extensiones.) Dadas dos extensiones,

$$\mathcal{E}_1 = (\ 0 \longrightarrow N \xrightarrow{a_1} E_1 \xrightarrow{b_1} M \longrightarrow 0\ )$$

$$\mathcal{E}_2 = (\ 0 \longrightarrow N \xrightarrow{a_1} E_1 \xrightarrow{b_1} M \longrightarrow 0\ )$$

decimos que $\mathcal{E}_1 \sim \mathcal{E}_2 \iff \exists \phi : E_1 \to E_2$ tal que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, "\phi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "a_2"] & E_2 \arrow[r, "b_2"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La construcción que hemos hecho permite demostrar el siguiente teorema, que le d nombre al funtor "Ext".

Teorema 4.9. *$\exists$ biyección entre $\operatorname{Ext}^1_A(M,N)$ y clases de equivalencia de extensiones $\mathcal{E}$ de la forma $0 \to N \to E \to M \to 0$.*

De manera similar, enunciamos sin demostración la generalización a grados superiores:

Teorema 4.10. *$\exists$ biyección entre $\operatorname{Ext}^n_A(M,N)$ y clases de equivalencia de extensiones $\mathcal{E}$ de la forma $0 \to N \to E_n \to \cdots \to E_2 \to E_1 \to M \to 0$*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La demostración la omitimos, sólo indicamos que se basa en ideas similares, construyendo, a partir de una f, push-outs sucesivos para conseguir una sucesión exacta del largo necesario hasta finalizar con M en el extremo derecho.

5. Dimensión homológica

5.1. Dimensión proyectiva, inyectiva y global

En el momento re realizar resoluciones proyectivas, vemos que las ocnstrucciones generales (e.g. a un M cubrirlo con un proyectivo de la forma $A^{(M))} \to M$) pueden ser útiles desde el punto de vista teórico, pero que en la práctica pueden dar objetos muy grandes, y pueden continuar indefinidamente. Sin embargo, muchas veces sucede que se pueden encontarr resoluciones proyectivas "pequeñas". Comenzamos con las siguientes definiciones:

Definiciones:
$pdim(M)$= min n / $\exists\ 0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$
$idim(M)$= min n / $\exists\ 0 \to M \to I_0 \to \cdots \to I_n \to 0$
(podrían ser $+\infty$)

Teorema 5.1. *(dimensión global) los siguientes números (eventualmente $+\infty$) son iguales*

1. $sup\{pdim(M) : M \in A - Mod\}$
2. $sup\{idim(M) : M \in A - Mod)\}$
3. $sup\{pdim(A/J) : J \subset A\}$
4. $sup\{n : \mathrm{Ext}^n_A(M,N) \neq 0,\ \ M, N \in A - Mod\}$

Llamaremos $gldim(A)$ al número calculado con cualqueira de los items del teorema anterior,

Lema 5.2. *Son equivalentes*

1. $pdim(M) \leq d$
2. $\mathrm{Ext}^n_A(M,N) = 0\ \forall n > d\ \forall N$
3. $\mathrm{Ext}^{d+1}_A(M,N) = 0\ \forall N$
4. $0 \to K_d \to P_{d-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ *con los* P_i *proy* $\Rightarrow K_d$ *es proyectivo.*

Demostración. $4 \to 1 \to 2 \to 3$ ok
$3 \to 4$: Afiración: $\forall N$, $\mathrm{Ext}^1_A(K_d, N) \cong \mathrm{Ext}^{d+1}_A(M,N)$.

Esto se demuestra simplemente consideranso el epimorfismo $P_0 \to M$, llamemos M' al núcleo de P_0, por la exactitud de la sucesión en 4 tenemos una s.e.c.

$$0 \to K_d \to P_{d-1} \to \cdots \to P_1 \to M' \to 0$$

y vemos que si M admite uuna resolución de largo d, entocnes M' admite una reslución de largo menor e inductivamente podemos suponer que el resultado es válido para M'. Pero de la s.e.c

$$0 \to M' \to P_0 \to M \to 0$$

tenemos la s.e.larga

$$\to \operatorname{Ext}_A^n(M,N) \to \operatorname{Ext}_A^n(P_0,N) \to \operatorname{Ext}_A^n(M',N) \to \operatorname{Ext}_A^{n+1}(M,N) \to \operatorname{Ext}_A^{n+1}(P_0,N) \to \cdots$$

y como P_0 es proyectivo $\operatorname{Ext}_A^\ell(P_0-) = 0$ para $\ell > 0$, lo que nos dice $\operatorname{Ext}_A^n(M',N) \cong \operatorname{Ext}_A^{n+1}(M,N)$, y así concluimos la afirmacón por inducción en d. $\square$

Notar que en item 2, si agregamos $\forall M$ tenemos una condición simétrica en las dos variables. Dualmente al lema anterior podemos mostrar:

Lema 5.3. ** Son equivalentes*

1. *$idim(N) \leq d$*
2. $\operatorname{Ext}_A^n(M,N) = 0\ \forall n > d\ \forall M$
3. $\operatorname{Ext}_A^{d+1}(M,N) = 0\ \forall M$
4. $0 \to N \to I^0 \to \dots I^{d-1} \to C^d \to 0$ *con los* I^i *iny* $\Rightarrow C^d$ *es inyectivo.*

Demostración. Ejercicio! $\square$

Observación 5.4. Para $3 \to 4$: $\forall M$, $\operatorname{Ext}_A^1(M, C^d) \cong \operatorname{Ext}_A^{d+1}(M,N)$. Podemos, luego, cambiar "$\forall M$" por "$\forall$ ideal $J \subset A$".

Dimensiones bajas

- $gldim(A) = 0 \iff$ todo A-módulo es proyectivo $\iff$ todo A-módulo es inyectivo $\iff$ A-Mod es semisimple $\iff$ $A \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots M_{n_k}(D_k)$ con D_i anillos de división $\iff$ todo lo mismo cambiando izquierda por derecha.
- $gldim(A) = 1 \iff$ todo submódulo de un proyextivo es proyectivo (y $\exists$ algún no proyectivo) $\iff$ todo cociente de un inyectivo es inyectivo (y $\exists$ algún no inyectivo).

  Por ejemplo, si A es un dip que no es un cuerpo, $gldim(A) = 1$. Un ejemplo no conmutativo: si Q es un quiver con por lo menos una flecha y k es un cuerpo entonces $gldim(kQ)$. Veremos esto como consecuencia de la desigualdad $gldim(A) \leq pdim_{A^e}(A)$ (si A es una k-álgebra sobre un cuerpo) y de una resolución corta de kQ como kQ-bimódulo. En particular, si $0 \neq V$ es un k-espacio vectorial, $gldim(TV) = 1$.

El principal teorema sobre dimensión que mostraremos es el siguiente:

Teorema 5.5. *$gldim(A[x_1, \dots, x_n]) = gldim(A) + n$*

Basta ver $gldim(A[x]) = gldim(A) + 1$. Notemos que un $A[x]$-módulo proyectivo es A-proyectivo.

Si $gldim(A) = \infty$ es claro. Supongamos $gldim(A) = d$ y sea M tal que $pdim_A M = d$, lo vemos como $A[x]$-mod con X actuando por cero) y lo resolvemos como $A[x]$-módulo,

$$\cdots \to P_d \to P_{d-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

los P_i son $A[x]$-proy $\Rightarrow$ la resolución no podr'ia terminarse antes por lo que $pdim_{A[x]}M \geq d$. Además, como son A-proyectivos y $pdim_A M = d$, el complejo

$$0 \to K_d \to P_{d-1} \to \cdots P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

es exacto (K_d es el núcleo) y K_d es un $A[x]$-modulo que es A-proyectivo. Demostremos el siguiente lema:

Lema 5.6. *K un $A[x]$-módulo que es A-proyectivo, entonces $pdim_{A[x]}K \leq 1$.*

Consideramos

$$0 \to A[x] \otimes_A K \longrightarrow A[x] \otimes_A K \longrightarrow K \to 0$$

con diferenciales

$$ax^n \otimes k \mapsto ax^n \otimes k - ax^{n-1} \otimes x \cdot k$$

$$ax^n \otimes k \mapsto ax^n \cdot k$$

Afirmación: es una s. exacta. La afirmacion concluye el lema, y el lema muestra $pdim_{A[x]}M \leq d+1$ via

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A[x] \underset{A}{\otimes} K_d \arrow[r] & A[x] \underset{A}{\otimes} K_d \arrow[rr, dotted] \arrow[dr] & & P_{d-1} \arrow[r] & \cdots P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & K_d \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

La firmación la dejamos como ejercicio. Como demostració alternativa, demostraremos el siguiente lema que generaliza este resultado:

Lema 5.7. *$x \in B$ central y no divisor de cero en B*
Si $0 \neq M$ es un $B/(x)$-módulo con $pdim_B(M) < \infty$ entonces

$$\boxed{pdim_B(M) = pdim_{B/(x)}(M) + 1}$$

Observación 5.8. Si tomamos $x \in B = A[x]$ y M un A-móduo que lo vemos como $A[x]$-módulo con $x \cdot m = 0$, entonces la estrictura de A-módulo de M la podemos ver como de $A = B/(x)$-módulo, y así vemos que este lema generaliza el anterior.

Demostración. **Inducción, caso 0.** Si $M = B/(x)$, no puede ser B-proyectivo porque tiene x-torsión, y la resolución $0 \to B \xrightarrow{x} B \to B/(x) \to 0$ muestra

$$pdim_B(M) = 1 = 0 + 1$$

Si M es $B/(x)$-libre el argumento es similar, notando que $pdim_B(M^{(I)} = pdim_B(M)$, y finalmente si $0 \neq M$ es $B/(x)$-proyectivo , es sumando directo de un libre, y notamos que -en general- si M es un s.d. de L, entonces $pdim_B M \leq pdim_B L$, que es 1 si L es libre. Pero además $pdim_B M \neq 0$ pues M no puede se B proyectivo, porque tiene x-torsión.

Paso inductivo: Si M no es $B/(x)$ proy, $pdim_{B/(x)}M = d > 0$, tomamos una s.e.c. de $B/(x)$-mod

$$0 \to K \to P \to M \to 0$$

Afirmación: $pdim_{B/(x)}K = d-1$, pues $\forall X \in B/(x)$-Mod y $\forall n \geq 1$ se tiene la s.e.larga

$$\mathrm{Ext}^n_{B/(x)}(P,X) \to \mathrm{Ext}^n_{B/(x)}(K,X) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_{B/(x)}(M,X) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_{B/(x)}(P,X)$$

(luego $\mathrm{Ext}^n_{B/(x)}(K,X) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_{B/(x)}(M,X)$) e inductivamente tenemos la fórmula para K:

$$pdim_B(K) = pdim_{B/(x)}(K) + 1$$

Además $pdim_B(P) = 1$, luego, $\forall n \geq 2$ y $\forall N \in B$-Mod

$$\mathrm{Ext}^n_B(P,N) \to \mathrm{Ext}^n_B(K,N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_B(M,N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_B(P,N)$$

concluimos que si $n \geq 2$, entonces $\boxed{\mathrm{Ext}^n_B(K,N) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_B(M,N)}$

Vemos que para $n = d$ hay un N donde $\mathrm{Ext}^{d+1}_B(M,N) \neq 0$, y para $n > d$, $\mathrm{Ext}^{n+1}_B(M,N) = 0 \forall N$. O sea, $pdim_B(K) = pdim_B(M) - 1$ (además de la misma fórmula con $pdim_{B/(x)}$).

Si $d = 1$ (K resulta $B/(x)$-proy) entonces la s.e.l del Ext nos da

$$\mathrm{Ext}^1_B(K,N) \to \mathrm{Ext}^2_B(M,N) \to 0$$

y

$$\mathrm{Ext}^n_B(K,N) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_B(M,N) \ \forall n \geq 2$$

Concluimos $pdim_B(M) \leq 2 = 1+1$. Queremos ver que no puede ser $pdim_B(M) = 1$.

Suponemos por el absurdo que $pdim_{B/(x)}M = 1$ y $pdim_B(M) = 1$ (en vez de 2) y tomamos una s.e.c. en B-mod (no en $B/(x)$-mod)

$$0 \to R \to F \to M \to 0$$

con $F \in B$-mod proyectivo. Si $pdim_B(M) = 1 \Rightarrow$ es B proyectivo. Como $B/(x) \otimes_B -$ manda B-proyectivos en $B/(x)$-proy. tenemos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}^B_1(B/(x),M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}^B_1(B/(x),M) \arrow[r] & B/(x)\underset{B}{\otimes} R \arrow[r] & B/(x)\underset{B}{\otimes} F \arrow[r] & B/(x)\underset{B}{\otimes} M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si fuera $pdim_{B/(x)}(M) = 1$ entonces $\mathrm{Tor}^B_1(B/(x),M)$ sería $B/(x)$-proyectivo, pero

$$\mathrm{Tor}^B_1(B/(x),M) \cong M^x = \{m \in M : xm = 0\} = M$$

NO es $B/(x)$ proy.

Ahora simplemente usamos que

$$pdim_{B/(x)}K = pdim_{B/(x)}M - 1$$

$$pdim_B K = pdim_B M - 1$$

y que la fórmula vale para K:

$$pdim_B K = pdim_{B/(x)}K + 1$$

luego, sumando 1 en ambos miembros y concluimos.

$$\boxed{pdim_B M = pdim_{B/(x)}M + 1}$$

$\square$

Un teorema conocido que no mostraremos relaciona la dimensión global con la dimensión geométrica dim(A) (la longitud maxima de cadenas de ideales primos) y simultáneamente caracteriza los anillos regulares:

Teorema 5.9. *A anillo conmutativo local , A es regular $\iff$ gldim$(A) < \infty$. En ese caso, gldim$(A) =$ dim(A).*

Un teorema que nos da otra fórmula sobre dimensiones, relacionado con el teorema anterior es el siguiente:

Teorema 5.10. *Sea $f : A \to B$ morfismo de anillos. $M \in B$-mod, luego también $M \in A$-mod via f. Entonces*

$$pdim_A(M) \leq pdim_B(M) + pdim_A({}_fB)$$

Demostración. Asumimos $pdim_B(M) \leq d < \infty$, $pdim_A({}_fB) < d' < \infty$.

Notemos que si $M = P$ es B-proyectivo, es un sumando directo de $B^{(I)}$, luego

$$pdim_A({}_fP) \leq pdim_A({}_fB^{(I)}) = pdim_A({}_fB)$$

En el caso no proyectivo general, resolvemos M como B-módulo:

$$0 \longrightarrow P_d \xrightarrow{\partial_d} P_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

a cada P_i (y a M) los vemos como A-módulos vía f,

$$0 \longrightarrow {}_fP_d \xrightarrow{\partial_d} {}_fP_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow {}_fP_1 \xrightarrow{\partial_1} {}_fP_0 \xrightarrow{\epsilon} {}_fM \longrightarrow 0$$

y los resolvemos como A-módulos **funtorialmente**, truncando con el núcleo en grado d (por ejemplo, a partir de a construcción asociada al epimorfismo funtorial $A^{(X)} \to X$).

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \cdots & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & P_{d,d'} \arrow[r] \arrow[d] & P_{d-1,d'} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & P_{1,d'} \arrow[r] \arrow[d] & P_{0,d'} \arrow[d] & & \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \ddots & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \\
 & P_{d,1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{d-1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & P_{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{0,1} \arrow[d] & & \\
 & P_{d,0} \arrow[r] \arrow[d] & P_{d-1,0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & P_{1,0} \arrow[r] \arrow[d] & P_{0,0} \arrow[d, "\eta"] & & \\
0 \arrow[r] & {}_fP_d \arrow[r, "\partial_d"] & {}_fP_{d-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & {}_fP_1 \arrow[r, "\partial_1"] & {}_fP_0 \arrow[r, "\epsilon"] & {}_fM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Afirmación: $Tot(P_{i,j}) \xrightarrow{\epsilon\circ\eta} M$ es un q-iso. La afirmación se debe a que el complejo doble

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
P_{d,d'} & \to & P_{d-1,d'} & \to\cdots & P_{1,d'} & \to & P_{0,d'} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
P_{d,1} & \to & P_{d-1,1} & \to\cdots & P_{1,1} & \to & P_{0,1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
P_{d,0} & \to & P_{d-1,0} & \to\cdots & P_{1,0} & \to & P_{0,0} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\eta \\
{}_fP_d & \xrightarrow{\partial_d} & {}_fP_{d-1} & \to\cdots\to & {}_fP_1 & \xrightarrow{\partial_1} & {}_fP_0
\end{array}$$

a menos de suspensión, se identifica con el cono del morfismo del complejo vertical abajo de todo, visto como morfisom de complejos $P_{\bullet,\bullet} \to P_\bullet$ (con conveniente cambio de signos alternados). Como las columnas son exactas, este complejo total es acíclico, y como el morfismo es acíclico, el orfismo es quasi-isomorfismo. A su vez, el complejo

$$0 \longrightarrow {}_fP_d \xrightarrow{\partial_d} {}_fP_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow {}_fP_1 \xrightarrow{\partial_1} {}_fP_0 \xrightarrow{\epsilon} {}_fM \longrightarrow 0$$

se identifica (a menos de suspensión) con el cono del morfismo de complejos

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & {}_fP_d & \xrightarrow{\partial_d} & {}_fP_{d-1} & \to & \cdots & \to & {}_fP_1 & \xrightarrow{\partial_1} & {}_fP_0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow\epsilon & & \\
0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & \cdots & \to & 0 & \to & M & \to & 0
\end{array}$$

que es acíclico, luego ϵ es un q-iso. Concluimos que $\epsilon \circ \eta$ coincide con la composición de dos q-isos, luego es un q-iso. □

Otra fórmula clásica de dimensión es la siguiente:

Teorema 5.11. *$x \in A$ central no divisor de cero, $M \in A$-Mod sin x-torsión ($xm = 0 \Rightarrow m = 0$) entonces*

$$pdim_{A/(x)}(M/xM) \leq pdim_A M$$

Demostración. si $pdim_A M = \infty$ es claro. argumentamos por inducción en $d = pdim_A M$. Si P es A-proyectivo $\Rightarrow P/xP$ es $A/(x)$-proyectivo (ejercicio!).

Si M no es proyectivo, sea

$$0 \to K \to P \to M \to 0$$

una s.e.c. de A-mod con P un A-mod proyectivo, sabemos que $pdim_A(K) = pdim_A(M) - 1$, y por hipótesis inductiva $pdim_{A/(x)}(K/xK) \leq pdim_A(K)$.

Si tensorizamos con $A/(x) \otimes_A -$ obtenemos la s.e.l. de Tor:

$$\mathrm{Tor}_1^A(A/xA, M) \to A/(x) \underset{A}{\otimes} K \to A/(x) \underset{A}{\otimes} P \to A/(x) \underset{A}{\otimes} M \to 0$$

pero

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^A(A/xA,M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A/(x)\underset{A}{\otimes} K \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A/(x)\underset{A}{\otimes} P \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A/(x)\underset{A}{\otimes} M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
M^x \arrow[r] & K/xK \arrow[r] & P/xP \arrow[r] & M/xM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $M^x = \{m \in M : x \cdot m = 0\}$, luego

$$0 \to K/xK \to P/xP \to M/xM \to 0$$

es una s.e.c. con P/xP un módulo $A/(x)$-proyectivo. Concluimos

$$pdim_{A/(x)}(K/xK) = pdim_{A/(xA)}(M/xM) - 1$$

y

$$pdim_{A/(x)}(M/xM) = pdim_{A/(x)}(K/xK) + 1 \leq pdim_A K + 1 = pdim_A M$$

$\square$

Corolario 5.12. *Sea $M \in A$-Mod, denotemos $M[x] := A[x] \otimes_A M$, entonces*

$$pdim_{A[x]} M[x] = pdim_A M$$

Demostración. $A = A[x]/(x)$ y $M[x]/xM[x] = M \Rightarrow pdim_A M \leq pdim_{A[x]} M[x]$. Como $A[x]$ es playo sobre A (es libre), si $P_\bullet \to M$ es una resol A-proyectiva entonces

$$A[x] \otimes_A P_\bullet \to M[x]$$

es una resolución $A[x]$-proyectiva de $M[x]$, luego $pdim_{A[x]} M[x] \leq pdim_A M$. $\square$

5.2. k-Álgebras, bimódulos k-simétricos y dimensión global

Comencemos con k anillo conmutativo, A una k-álgebra. Describiremos la categoría de A-bimódulos k-simétricos. Para las aplicciones a fórmula de dimensión usaremos la descripción en el caso k un cuerpo (o anillo conmutativo semisimple).

Definición 5.13. un A-bimódulo M se dice k simétrico si $\lambda m = m\lambda \ \forall \lambda \in k$

Notar que la definición de k-álgebra incluye que A es k-simétrico.

Ejemplo 5.14. $\mathcal{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ contiene a $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$. Notar $ij = k = -ji$, luego no es $\mathbb{C}$-simétrico, pues $zj = j\bar{z}$. $\mathcal{H}$ no es $\mathbb{C}$-álgebra. Pero sí es $\mathbb{R}$-álgebra.

Teorema/construcción Sea $A^e := A \otimes A^{op}$. La categoría de A-bimódulos k simétricos es isomorfa a la categoría de A^e-mod a izquierda, y también a derecha, via

$$(a \otimes a') \cdot m = ama' = m \cdot (a' \otimes a)$$

Atención: Si M es bimódulo k-simétrico, entonces no es necesariamente un A^e-bimódulo. Es módulo a izquierda, o a derecha, pero no simultáneamente ambos.

5.3. $gldim(A)$ y A como bimódulo k-simétrico

Mostraremos la siguiente fórmula de dimensión:

Teorema 5.15. *k cuerpo y A una k-álgebra entonces* $\boxed{gldim(A) \leq pdim_{A^e}(A)}$

Observación 5.16. Si L es A^e libre, $L \cong (A^e)^{(I)}$ entonces L visto como bimódulo es

$$L \cong A \otimes V \otimes A$$

con $V = k^{(I)}$. En particular, para cualquier $M \in {}_A Mod$

$$L \otimes_A M \cong (A \otimes V \otimes A) \otimes_A M \cong A \otimes V \otimes (A \otimes_A M) \cong A \otimes V \otimes M$$

$$\cong A \otimes (V \otimes M)$$

es A-libre, en particular A-proyectivo. Concluimos entonces que si P es A^e-proyectivo entonces $P \otimes_A M$ es proyectivo en A-Mod.

Como corolario, podemos demostrar la fórmula del teorema:
Si $pdim_{A^e} A = d$ entonces existe una resolución

$$0 \to P_d \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

resolución de A por A^e-proyectivos. En particular son A-proyectivos a derecha, entonces el complejo admite una homotopía A-lineal a derecha y en consecuencia $\forall M \in {}_A Mod$

$$0 \to P_d \otimes_A M \to \cdots \to P_1 \otimes_A M \to P_0 \otimes_A M \to A \otimes_A M \to 0$$

tiene una homotopía k-lineal, en particular, es una sucesión exacta. Pero como $A \otimes_A M \cong M$, cada $P_i \otimes_A M$ es A-proyectivo, entonces la anterior es una resolución (funtorial en M) A-proyectiva de M, y como el M es arbitrario concluimos $gldim(A) = sup_M pdim_A(M) \leq d = pdim_{A^e} A$

Ejemplos:

1) k es un cuerpo, V k esp. vect, $A = TV$ (el álgebra tensorial), $A = kQ$ (el álgebra de caminos de un quiver), son álgebras de dimensón global 1.

$$0 \to TV \otimes V \otimes TV \to TV \otimes TV \to TV \to 0$$

$$1 \otimes v \otimes 1 \mapsto v \otimes 1 - 1 \otimes v$$

Observación:

$$\sum a_i \otimes b_1 \mapsto \sum_i a_1 b_i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum a_i \otimes b_1 = \sum a_i \otimes b_1 - \sum a_i b_1 \otimes 1 = \sum a_i (1 \otimes b_1 - b_i \otimes 1)$$

Además

$$1 \otimes bc - bc \otimes 1 = (1 \otimes b - b \otimes 1)c + b(1 \otimes c - c \otimes 1)$$

veamos que $d : TV \otimes V \otimes TV \to TV \otimes TV$

$$1 \otimes v \otimes 1 \mapsto v \otimes 1 - 1 \otimes v$$

es inyectiva. Sea $x_1, \ldots, x_n$ una base de V. Definimos $h : TV \otimes TV \to TV \otimes V \otimes TV$ como la única TV-libeal a izquierda que verifica

$$h(1 \otimes 1) = 0$$

$$\begin{aligned} h(1 \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k}) &:= 1 \otimes x_{i_1} \otimes x_{i_2} \cdots x_{i_k} + x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes x_{i_3} \cdots x_{i_k} + \cdots \\ &= \sum_{j=i}^{k} x_{i_1} \cdots x_{i_{j-1}} \otimes x_{i_j} \otimes x_{i_{j+1}} \cdots x_{i_k} \end{aligned}$$

donde por convención $x_{i_0} = 1 = x_{i_{k+1}}$

Notar que

$$h(1 \otimes x x_{i_1} \cdots x_{i_k}) = 1 \otimes x \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k} + x h(1 \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k})$$

$$h(1 \otimes x x_{i_1} \cdots x_{i_k}) = 1 \otimes x \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k} + x h(1 \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k})$$

Consecuencia:

$$\begin{aligned} hd(1 \otimes x_i \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k}) &= h(x_i \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k}) - h(1 \otimes x_i x_{i_1} \cdots x_{i_k}) \\ &= x_i h(1 \otimes x_{i_2} \cdots x_{i_k}) - h(1 \otimes x_i x_{i_1} \cdots x_{i_k}) \\ &= x_i h(1 \otimes x_{i_2} \cdots x_{i_k}) - 1 \otimes x_i \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k} - x_i h(1 \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k}) \\ &= -1 \otimes x_i \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k} \end{aligned}$$

$\therefore hd = -\mathrm{Id}$ en una base (como TV-mod a izq)

Ejemplo / Ejercicio: Sea $Q = (Q_0, Q_1)$ un quiver, k un cuerpo, $A = kQ$, llamemos $V := kQ_1$ (que es un kQ_0-bimódulo no simétrico),

$$0 \to A \underset{kQ_0}{\otimes} V \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \to 0$$

con la "misma" fórmula de antes, es una sucesión exacta. Además $A \underset{kQ_0}{\otimes} V \underset{kQ_0}{\otimes} A$ es un sumando directo de $A \otimes V \otimes A$ (como A-bimódulo), idem $A \underset{kQ_0}{\otimes} A$ de $A \otimes A$.

Concluimos que $gldim(kQ) = 1$. Notar que si Q no tiene ciclos orientados entonces kQ es una k-álgebra de dimensión finita.

Ejemplo / Ejercicio: (un poco más largo) Q quiver, $I = \langle Q_1 \rangle$, $A = kQ/(I)^2$. (notar que $(I)^2$= ideal generado por caminos de longitud 2) entonces A admite una resolución de la forma

$$\cdots \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_3 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_2 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_1 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} A \xrightarrow{m} A \to 0$$

donde el diferencial está dado por

$$A \underset{kQ_0}{\otimes} PQ_n \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} PQ_{n-1} \underset{kQ_0}{\otimes} A$$

$$1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_n \otimes 1 \mapsto \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_n \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \otimes \alpha_n$$

Ver que $d^2 = 0$ es un ejercicio muy sencillo. Dejamos la demostración de la exactitud como ejercicio, con la sugerencia de realizarlo después de ver la sección de resoluciones de Koszul

Si Q no tiene ciclos orientados entonces $gldim(A)$=la longitud del camino más largo posible en Q. Para el quiver

$$1 \to 2 \to \cdots \to n$$

el álgebra kQ/I^2 tiene dimensión global n.

Atención: La desigualdad $gldim(A) \leq pdim_{A^e}(A)$ puede ser estricta. Adelantamos el siguiente resultado, cuya demostración veremos luego:

$$\boxed{A \text{ conmutativo} \Rightarrow \operatorname{Ext}^1_{A^e}(A, A) \cong \operatorname{Der}_k(A)}$$

Asumiendo válida la fórmula del Ext anterior, podemos construir fácilmente ejemplos en dode la desigualdad es estricta de la siguiente forma:

Sea k un cuerpo y $A = k(x)$=el cuerpo de fracciones de $k[x]$. Como A es cuerpo, $gldim(A) = 0$, pero

$$\operatorname{Der}_k(k(x), k(x)) \neq 0$$

pues se puede chequear fácilmente que la conocida fórmula de análisis

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

define un derivación en $A = k(x)$, luego $0 \neq \operatorname{Ext}^1_{A^e}(A, A)$ y por lo tanto $pdim_{A^e}(A) \geq 1$. y

$$gldim(A) = 0 < 1 \leq pdim_{A^e}(A)$$

El otro ejemplo paradigmático de derivación no nula en cuerpos para característica positiva es el siguiente:

Ejemplo 5.17. (Derivación por inseparabilidad) k cuerpo $ch(k) = p > 0$, $a \in \overline{k} \setminus k$ tal que $a^p = \lambda \in k$. Entonces $K = k(a)$ es una extensión finita (no separable). Una base de K sobre k está dada por $1, x, x^2, \cdots x^{p-1}$ y la derivación "Euleriana" determinada en la base como k-espacio vectorial por

$$x^i \mapsto ix^i$$

es efectivamente una derivación k-lineal, luego $\operatorname{Der}_k(K) \neq 0$.

5.4. Ext^1 en bimódulos y derivaciones

Ademś de producir el contraejemplo anterior, mostraremos la fórmula del siguiente teorema, que es interesante en sí misma por la relación que nos muestra entre la geometría y el álgebra homológica:

Teorema 5.18. *A conmutativo* $\Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A,A) \cong \mathrm{Der}_k(A)$.

En realidad mostraremos una versión mucho más general:

Teorema 5.19. *Sea A un anillo arbitrario (no necesariamente conmutativo) entonces*

$$\mathrm{Ext}^1_{A-bimod}(A,A) \cong \mathrm{Der}(A)/\mathrm{InnDer}(A)$$

donde $\mathrm{InnDer}(A)$ *son las derivaciones de la forma $a \mapsto [a,a_0]$. Si además A es una k-álgebra con k un anillo conmutativo y el* Ext^1 *se calcula en la categoría de A-bimódulos k-simétricos entonces*

$$\mathrm{Ext}^1_{A^e}(A,A) \cong \mathrm{Der}_k(A)/\mathrm{InnDer}(A)$$

Demostración. Utilizamos la caracterización del Ext como extensiones. Sea

$$0 \to A \to E \to A \to 0$$

una s.e.c. de A-bimod (k-simétricos), entonces es -en particular- una s.e.c. de A-mod, luego

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\cong"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_1"] & A \oplus A \arrow[r, "p_2"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

como A-mod a izquierda.

Si $e = (x,y) \in A \oplus A \cong E$ entonces

$$a(x,y) = (ax, ay)$$

porque el iso es de A-mod a izq. También

$$(x,0)a = (xa, 0)$$

porque $i : A \to E$ es morfismo de bimódulos, pero

$$(0,y)a = (??, ya)$$

pues $p : E \to A$ que es de bimódulos y el splitting es A-lineal sólo a izq. O sea, $0 \oplus A$ no sabemos si es sub-bimod.

Denotemos

$$(0,1)a = (D(a), a)$$

donde $D(a) := p_1((0,1)a)$. Esta D determina la estructura pues

$$(x,y)a = (x,0)a + (0,y)a = (xa,0) + y(0,1)a$$

$$= (xa,0) + y(D(a),a) = (xa + yD(a), a)$$

Afirmamos que $\boxed{D \in \mathrm{Der}_k(A)}$. En efecto,

$$(0,1)ab = (D(ab), ab)$$

pero también

$$((0,1)a)b = (D(a), a)b = (D(a)b + aD(b), ab)$$

$$(0,1)(a + a') = (0,1)a + (0,1)a' \Rightarrow D(a + a') = D(a) + D(a')$$

E es k-simétrico $\Rightarrow$ (si $\lambda \in k$) $(0,1)\lambda = \lambda(0,1) \Rightarrow$

$$(D(\lambda), \lambda) = (0, \lambda) \Rightarrow D(\lambda) = 0$$

Sea $A \oplus_D A = A \oplus A$ como A-mod a izq y

$$(x, y)a = (xa + yD(a), ya)$$

y supongamos ϕ un iso de A-bimódulos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & A \oplus_D A \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_1"] & A \oplus_{\widetilde{D}} A \arrow[r, "p_2"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces $\phi(x, 0) = (x, 0)$, $\phi(0, y) = (??, y)$. Sea $u \in A$ tal que $\phi(0, 1) = (u, 1)$. Luego

$$\phi(x, y) = (x, 0) + \phi(0, y) = (x, 0) + y\phi(0, 1) = (x + yu, y)$$

$$\boxed{\phi(x, y) = (x + yu, y)}$$

$$\phi((0,1)a) = \phi(D(a), a) = (D(a) + au, a)$$

$$\phi((0,1))a = (u, 1)a = (ua + \widetilde{D}(a), a)$$

$$\Rightarrow D(a) = \widetilde{D}(a) + ua - au$$

Concluimos $\mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, A) \cong \mathrm{Der}_k(A)/Innder(A)$. □

En particular si A es conmutativo, $\mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, A) \cong \mathrm{Der}_k(A)$.

6. Cohomología de Hochschild, resolución standard

Si A un k-álgebra, entonces $M = A$ juega un rol importante en la categoría de A-bimódulos simétricos. Se define la hoología y cohomología de Hochschild con coeficientes en un A-bimódulo k-simétrico M como

$$H^\bullet(A, M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A, M)$$

$$H_\bullet(A, M) = \mathrm{Tor}^{A^e}_\bullet(A, M)$$

En el caso particular $M = A$ se suele denotar $HH_\bullet(AA)$ y $HH^\bullet(A) = H^\bullet(A, A)$.

Para calcular $H^\bullet(A, M)$ o $H_\bullet(A, M)$ hay una resolución de A como A-bimódulo que permite definir un complejo canónico para calcular ambas teorías de homología, se denomina la *resolución standard*. Como objeto graduado, la resolución de A tiene la forma

$$\cdots \to A^{\otimes n+1} \to \cdots \to A^{\otimes 3} \to A^{\otimes 2} \to A \to 0$$

donde en $A^{\otimes n+1} = A \otimes A^{\otimes n-1} \otimes A$ (si $n-1 \geq 0$) se considera la estructura de A-bimódulo dada por el primer y último factor tensorial, es decir,

$$a \cdot (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes \otimes a_n) \cdot a' = aa_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes \otimes a_n a'$$

Notemamos que ante la equivalencia de categorías A-bimod k simétricos $\leftrightarrow$ A^e-mod, un bimódulo de la forma $A \otimes V \otimes A$ le corresponde $A^e \otimes V$. Por lo tanto, si V es k-proyectivo (por ejemplo el caso s A es proyectiva como k-álgebra y $V = A^{\otimes n-1}$, entonces $A \otimes V \otimes A$ es un objeto proyectivo en la categoría de A^e-módulos.

Definimos entonces

$$B_n(A) := A^{\otimes n+1}$$

con diferencial

$$b'(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n$$

Por ejemplo, en grados bajos:

$$b'(a \otimes b \otimes c \otimes d) = ab \otimes c \otimes d - a \otimes bc \otimes d + a \otimes b \otimes cd$$

$$b'(a \otimes b \otimes c) = ab \otimes c - a \otimes bc$$

$$b'(a \otimes b) = ab = m(a \otimes b)$$

Para ver que $b'^2 = 0$, podemos observar que b' es una suma alternada de operaciones, y que este diferencial entra dentro del esquema de los difereciales asociados a objetos simpliciales. Recordamos el siguiente hecho:

Hecho: $d_i^n : C_n \to C_{n-1}$, $i = 0, \ldots, n-1$ son morfismo entre ciertos módulos C_n, verificando

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \ \forall i < j$$

o mejor dicho

$$d_i^{n-1} d_j^n = d_{j-1}^{n-1} d_i^n \ \forall i < j$$

Entonces

$$\partial_n := \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i d_i^n$$

verfifica $\partial^2 = 0$.

En nuestro caso

$$C_n = B_n(A) := A^{\otimes n+1}$$

$$d_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n$$

Además, $s(a_0 \otimes \cdots n_n) = 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n$ verifica

$$d_0 s = \mathrm{Id}$$

$$s d_i^n = d_{i+1}^{n+1} s$$

luego (ejercicio!) $sb' + b's = \mathrm{Id}$.

Concluimos que el complejo anterior es exacto

$$\cdots \to A^{\otimes n+1} \to \cdots \to A^{\otimes 3} \to A^{\otimes 2} \to A \to 0$$

y por lo tanto provee de una resolución de A como A^e-módulo.

Observación 6.1. Esta resolución también permite contar con resoluciones funtoriales en A-Mod. Si $X \in {}_A\mathrm{Mod}$:

$$\cdots \to A^{\otimes n} \otimes X \to \cdots \to A^{\otimes 2} \otimes X \to A \otimes X \to X \to 0$$

con diferencial

$$b'(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes x) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes x$$

es isomorfa a $B_n(A) \otimes_A X$, que es una resolución porque la homotopía s, si bien no es A-lineal a izquierda, es A-linel a derecha, por lo que $s \otimes_A \mathrm{Id}_X$ da una homotopía k-lineal probando la exactitud. Si asumimos k cuerpo (o que tanto A como X sean k-proyectivos), las componentes son A-proyectivas.

Observación 6.2. Como $B_\bullet(A)$ resulte a A como A-bimódulo k-simétrico, se puede utilizar esta resolución para para calcular $\mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A, M)$ y $\mathrm{Ext}_{A^e}^\bullet(A, M)$, para M un A-bimódulo k-simétrico. Haremos esto último.

Recordamos

$$\mathrm{Hom}_{A-bimod}(A \otimes V \otimes A, M) \cong \mathrm{Hom}_{k-bim}(V, M)$$

Luego

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(A^{n+1}, M) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes A^{\otimes n-1} \otimes A, M)$$

$$\cong \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n-1}, M) =: C^n(A, M) \rightsquigarrow$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(k, M) \to \mathrm{Hom}(A, M) \to \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, M) \to \mathrm{Hom}(A^{\otimes 3}, M) \to \cdots$$

Notar $M \cong \mathrm{Hom}_k(k, M)$, $m \mapsto \widehat{m}$ $(1 \mapsto m)$). El diferencial en grados bajos es

$$\partial(\widehat{m})(a) = am - ma$$

$$\partial(D)(a \otimes b) = aD(b) - D(ab) + D(a)b$$

$$\partial(f)(a \otimes b \otimes c) = af(b \otimes c) - f(ab \otimes c) + f(a \otimes bc) - f(a \otimes b)c$$

$\therefore$

$$H^0(A, M) = M^A$$

y re-encontramos

$$H^1(A, M) = \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, M) = \frac{\mathrm{Der}_k(A, M)}{Innder(A, M)}$$

Nos preguntamoms por una nterpretación de $H^2(A, M) = \mathrm{Ext}^2(A, M)$, es lo que haremos en la siguente sección.

6.1. H^2 y deformaciones

Una introducción al "espacio tangente a las algebras"

Por comodidad supongamos que el cuerpo k es $\mathbb{R}$, y fijemos un espacio vectorial A con $\dim_k A = n$ y una aplicación lineal $m : A \otimes A \to A$,

$$m \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes A, A) \cong (k^2 \otimes k^n)^* \otimes k^n \cong k^{n^3}$$

Si $\{x_i, \ldots, x_n\}$ es base,

$$m(x_i \otimes x_j) = x_i x_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$$

$$\therefore m = \sum_{i,j} c_{ik}^k x^i \otimes x^j \otimes x_k \in (k^n)^* \otimes (k^n)^* \otimes k^n$$

m asociativa $\iff$ los c_{ij}^k verfican ciertas ecuaciones (cuadráticas).

A menos de isomorfismo lineal (i.e. encontarr una base) podemos suponer $A = k^n$. Concluimos que hay una correspondencia entre

"las álgebras de dimensión $n \leftrightarrow$ un subconjunto de k^{n^3} que satisface unas ecuaciones"

Si $k = \mathbb{R}$, y

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^3} : \gamma(0) = m \ \text{ y } \gamma(t) = m_t \text{ es una multiplicación asociativa en } \mathbb{R}^n$$

entonces $\gamma'(0)$=un vector tangente a "las álgebras de $\mathbb{R}^n$ en el punto $A = (\mathbb{R}^n, m)$. Se define el espacio tangente a las ágebras de dimensión n en el punto m a todos los posibles $\gamma'(0)$ con γ como antes,

Observación 6.3. si $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^3}$ verificando

- $\widetilde{\gamma}(0) = \gamma(0) = m$,
- $\widetilde{\gamma}'(0) = \gamma'(0)$,

entonces $\widetilde{\gamma}(t) = \widetilde{m}_t$ no es necesariamente asociativa, pero Taylor de orden 1 alrededor de 0 de m y de $\widetilde{m}$ coinciden, y $\gamma'(0) = \widetilde{\gamma}'(0)$. Concluimos que da lo mismo considerr

$$\widetilde{\gamma}(t) = m_t := m + tf \text{ donde } f : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

y m_t verifica asociatividad a menos de $O(t^2)$

Notación:

$$a \cdot_t b = m_t(a \otimes b) = (m + tf)(a \otimes b) = ab + tf(a \otimes b)$$

La condició a considerar es

$$(a \cdot_t b) \cdot_t c = a \cdot_t (b \cdot_t c) + O(t^2)$$

$$(a \cdot_t b) \cdot_t c = (ab + tf(a \otimes b)) \cdot_t c$$

$$= (ab)c + tf(ab \otimes c) + t\Big(f(a \otimes b)c + tf(f(a \otimes b) \otimes c)\Big)$$

$$= (ab)c + t\Big(f(ab \otimes c) + f(a \otimes b)c\Big) + O(t^2)$$

$$a \cdot_t (b \cdot_t c) = a \cdot_t (bc + tf(b \otimes c))$$

$$= a(bc) + tf(a \otimes bc) + t\Big(af(b \otimes c) + tf(a \otimes f(b \otimes c))\Big)$$

$$= a(bc) + t\Big(f(a \otimes bc) + af(b \otimes c)\Big) + O(t^2)$$

Concluimos m_t asociativa Mod $t^2 \iff f : A \otimes A \to A$ verifica

$$f(ab \otimes c) + f(a \otimes b)c = f(a \otimes bc) + af(b \otimes c)$$

es decir, $\iff$

$$\partial(f)(a \otimes b \otimes c) = af(b \otimes c) - f(ab \otimes c) + f(a \otimes bc) - f(a \otimes b)c = 0$$

¿Qué estamos haciendo?

Desde el punto de vista de la cuenta algebraica que estamos realizando, si A una k-algebra entonces $A \otimes_k k[t]/(t^2)$ es una $k[t]$-álgebra, que como grupo abeliano es

$$A \otimes_k k[t]/(t^2) = A[t]/(t^2) = A \oplus At$$

$$(a + tb)(c + td) = ac + t(ad + bc)$$

pero, cuáles son las estructuras de $k[t]/(t^2)$-álgebra (o sea t central y $t^2 = 0$) en $A \oplus At$ que coinciden con A módulo t?

O sea,

$$(a + tb) * (c + td) = ac + t(\cdots)$$

Definimos $f : A \otimes_k A \to A$ vía

$$a * c = ac + tf(a \otimes b)$$

Esta f determina $*$, pues

$$\begin{array}{rcl}
(a+tb)*(c+td) & = & a*c+t(a*d+b*c)+t^2(\cdots) \\
& = & a*c+t(a*d+b*c) \\
& = & ac+tf(a\otimes c)+t(ad+t(..)+bc+t(..)) \\
& = & ac+t\Big(f(a\otimes c)+ad+bc\Big)+t^2(..) \\
& = & ac+t\Big(f(a\otimes c)+ad+bc\Big)
\end{array}$$

Ejercicio / Proposición: son equivalentes

- $* = *_f$ es asociativa $\iff$
- $f(ab\otimes c)+f(a\otimes b)c = f(a\otimes bc)+af(b\otimes c)\ \forall a,b,c\in A$
- $\partial(f)=0$ donde ∂ es el borde de Hochschild.

Consideramos la siguiente generalización: Sea A una k-álgebra y supongamos

$$p: B\to A$$

un **epimorfismo** de k-álgebras con $M := \mathrm{Ker}p$ de cuadrado cero ($mm' = 0\forall m,m'\in \mathrm{Ker}p$)

Observación 6.4. $M^2 = 0 \Rightarrow bm = (b+m')m$ y $mb = m(b+m')$. Luego M es un B-bimódulo que es un $B/M = A$-bimódulo.

Supondremos que o bien k es cuerpo, o bien la sucesión

$$0\to M\to B\to A\to 0$$

se parte como sucesión de k-módulos. Tomamos s un splitting y gracias a eso tenemos un diagrama como sigue:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal, "\cong"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[l, bend right, dotted, "s"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_1"] & M\oplus A \arrow[r, "p_2"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En $M\oplus A$ la inclusión de M es como ideal de cuadrado cero, la proyección en A es de k-álgebras. Luego

$$(m,0)*(m',0)=0$$

$$(0,a)*(0,a') = (??, aa')$$

y M es B-sub-bimódulo:

$$(m,0)*(m',a) = (...,0)$$

$$(m',a)*(m,0) = (...,0)$$

Más aún, sabemos que M es A-bimódulo vía

$$am = s(a)*m,$$

$$ma = m * s(a)$$

Luego

$$(m,0)*(m',a) = (m,0)*(m',0) + (m,0)*(0,a) = 0 + (ma,0)$$

y similarmente

$$(m',a)*(m,0) = (am,0)$$

De qué depende $*$? si definimos $f : A \otimes A \to M$ vía

$$(0,a)*(0,a') = (f(a\otimes a'), aa')$$

entonces $*$ queda en términos de f:

$$(m,a)*(m',a') = (ma' + am' + f(a\otimes a'), aa')$$

Ejercicio / Proposición: Sea $f : A\otimes A \to M$, son equivalentes

- $* = *_f$ es un producto asociativo en$B = M \oplus A$,
- $f(ab\otimes c) + f(a\otimes b)c = f(a\otimes bc) + af(b\otimes c)\ \forall a,b,c \in A$
- $\partial(f) = 0$ donde ∂ es el borde de Hochschild en $C^2(A,M)$.

Teorema 6.5. *Sean $f_1, f_2 : A\otimes A \to M$. Entonces $\exists$ un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & (M\oplus A, *_{f_1}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & (M\oplus A, *_{f_2}) \arrow[r, "p"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

si y sólo si existe $D : A \to M$ k-lineal tal que $f_1 - f_2 = \partial(D)$. En consecuencia, existe una biyección

$$H^2(A,M) \leftrightarrow \text{ clases de } (0\to M\to B\to A\to 0)$$

que se parten como k-módulos donde B es k-álgebra, $B\to A$ es epi de k-álgebras, y M es un ideal de cuadrado cero.

Demostración. si el diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & (M\oplus A, *_{f_1}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & (M\oplus A, *_{f_2}) \arrow[r, "p"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

entonces $\phi(m,0) = (m,0)$ y $\phi(0,a) = (??,a)$. Definimos $D : A\to M$ vía

$$\phi(0,a) = (D(a), a)$$

D es claramente k-lineal. ϕ es multiplicativa si y sólo si (ejercicio ver que es suficiente)

$$\phi((0,a) *_1 (0,a')) = \phi(0,a) *_2 \phi(0,a')$$

$$\phi((0,a) *_1 (0,a')) = \phi(0,a) *_2 \phi(0,a')?$$

$$\phi((0,a) *_1 (0,a')) = \phi(f_1(a \otimes a'), aa') = (f_1(a \otimes a') + D(aa'), aa')$$

$$\phi(0,a) *_2 \phi(0,a') = (D(a), a) *_2 (D(a'), a')$$

$$= (D(a)a' + aD(a') + f_2(a \otimes a'), aa')$$

ambas expresiones son iguales $\iff$

$$f_1(a \otimes a') + D(aa') = D(a)a' + aD(a') + f_2(a \otimes a')$$

$\iff f_1 - f_2 = \partial(D)$. $\square$

7. Cohomología de grupo

7.1. Resolución bar, cohomología de grupos y extensiones de núcleo abeliano

Recordamos, dar un $\mathbb{Z}[G]$-módulo es lo mismo que dar un grupo abeliano + una acción aditiva de G, es decir, que valgan las fórmulas:

- $1 \cdot m = m$,
- $(gh) \cdot m = g \cdot (h \cdot m)$,
- $g \cdot (m + m') = g \cdot m + g \cdot m'$.

Similarmente, $k[G]$-módulos = k-módulos con una acción k-lineal de G:

$$g \cdot (\lambda m) = \lambda(g \cdot m)$$

Sea B_n=$k[G]$-módulo libre con base G^n, denotamos

$$[g_1|\cdots|g_n] = e_{(g_1,\ldots,g_n)}$$

Notamos $B_n \cong k[G]^{\otimes n+1} = k[G] \otimes k[G]^{\otimes n}$. Para $n = 0$, B_n=$k[G]$-módulo libre de rango 1, con base $[\ ]$. Se define $\partial : B_n \to B_{n-1}$ via

$$\partial[g_1|\cdots|g_n] = g_1[g_2|\cdots|g_n] - [g_1g_2|g_3|\cdots|g_n]$$

$$+[g_1|g_2g_3|\cdots] - \cdots + (-1)^{n-1}[g1|\cdots|g_{n-1}g_n] + (-1)^n[g1|\cdots|g_{n-1}]$$

$$= g_1[g_2|\cdots|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1\cdots|g_ig_{i+1}|\cdots|g_n]$$

$$+(-1)^{n+1}[g_1|\cdots|g_{n-1}]$$

Por ejemplo, en grados bajos, para $x, y, z \in G$

$$\partial[x|y|z] = x[y|z] - [xy|z] + [x|yz] - [x|y]$$

$$\partial[x|y] = x[y] - [xy] + [x]$$

$$\partial[x] = x[\ ] - [\ ] = (x - 1)[\ ]$$

Notar $B_0/\partial(B_1) = k[G]/\langle(g - 1) : g \in G\rangle \cong k$ con acción trivial, pues

$$k[G] \xrightarrow{\epsilon} k$$

$$g \mapsto 1$$

$$\sum_{g\in G} \lambda_g g \mapsto \sum_{g\in G} \lambda_g$$

Si $\sum_{g\in G} \lambda g \in \mathrm{Ker}(\epsilon) \Rightarrow$

$$\sum_{g\in G} \lambda_g g = \sum_{g\in G} \lambda_g g - \sum_{g\in G} \lambda_g = \sum_{g\in G} \lambda_g(g - 1)$$

Para el caso $k = \mathbb{Z}$,

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(B_n, \mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G] \otimes \mathbb{Z}[G^{\times n}], \mathbb{Z})$$
$$\cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^{\times n}], \mathbb{Z}) \cong Func(G^{\times n}, \mathbb{Z})$$

y el diferencial es, si $f : G^{\times n} \to \mathbb{Z}$,

$$\partial(f)(g_1, \ldots, g_{n+1}) = f(g_2, \ldots, g_{n+1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_{n+1}) + (-1)^{(n+1)} f(g_1, \cdots, g_n)$$

Nota: este es el complejo que da el modelo simplicial para calcular $H^n(K_1(G))$ y $H_n(K_1(G))$, donde $K_1(G)$ es un espacio topoógico determinado de manera única a menos de equivalencia homotópica que es conexo, su π_1 es G y todos los π_n superiores son triviales.

Observación 7.1. B_n es $k[G]$-libre con base G^n y si $s : B_n \to B_{n+1}$

$$s(g[g_1| \cdots |g_n]) := [g|g_1| \cdots |g_n]$$

$\Rightarrow s\partial + \partial s = \mathrm{Id}$. Luego

$$H_\bullet(G) := H_\bullet(K_1(G)) = \operatorname{Tor}_\bullet^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$
$$H^\bullet(G) := H^\bullet(K_1(G)) = \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^\bullet(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$

y se puede usar cualquier resolución de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G]$-módulo, y no solo la resolución bar.

Ejemplo 7.2. $G = C_n = \langle t : t^n \rangle = 1$. $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)$.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[G]/(t-1)$$

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde $N = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}$, es una resolución.

Demostración. Es claro que es proyeciva porque es libre (de rango 1), vemos que es exacta. Vemos que es exacta. Escribamos un elemento de $\mathbb{Z}[G]$ como

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$. Si

$$0 = (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^{i+1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}_n} (a_i - a_{i-1}) t^i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_0 t^i = N a_0$$

es decir, $\operatorname{Ker}(1-t) = \Im(N)$. Para la otra igualdad, notemos primero

$$Nt = N$$

luego, si un elemento está en el núcleo de N, tenemos

$$0 = N\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i N \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i + \sum_{i=1}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t^i - 1) \in Im(1-t)$$

$$\therefore\ \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

□

Corolario 7.3. *Si $G = C_n$, $H^0(G) = \mathbb{Z} = H_0(C_n)$, y después es 2-periódica.*

Más explícitamente, si usamos l aresolución

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Los complejos de homología y cohomología quedan

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \arrow[r, "N"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \arrow[r, "1-t"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) \arrow[r, "1-t"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) \arrow[r, "N"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) \arrow[r, "1-t"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) \arrow[r, "N"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"] & {}
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ para grados positivos

$$H^{2k+1}(G) = 0 = H_{2k}(G)$$
$$H^{2k}(G) = \mathbb{Z}_n = H_{2k+1}(G)$$

Ejercicio: Si tensorizamos con $-\otimes_{k[G]} k$ el complejo

$$\cdots \to k[G]^{\otimes n+1} \to \cdots \to k[G]^{\otimes 3} \to k[G]^{\otimes 2} \to k[G] \to 0$$

con diferencial b', obtenemos el complejo bar.

Homología y cohomología a coeficientes

Si M es un G-módulo, se define

$$H_\bullet(G,M) = \mathrm{Tor}_\bullet^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$$

$$H^\bullet(G,M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$$

Coro / Ejercicio: $M \in k[G]$-Mod $\Rightarrow \mathrm{Ext}^\bullet_{k[G]}(k,M)$ se calcula con

$$\mathrm{Hom}_{k[G]}(B_n,M) \cong \mathrm{Hom}_{Sets}(G^n,M)$$

y diferencial

$$(df)(x_1,\ldots,x_n) = x_1\cdot f(x_2,\ldots,x_n)+$$

$$+\sum_{i=1}^{i+1} f(x_1,\cdots,x_ix_{i+1},\ldots,x_n) + (-1)^{n+1}f(x_1,\ldots,x_{n-1})$$

$$H^1(G,M) \cong \frac{\{f: G\to M : x\cdot f(y) - f(xy) + f(x) = 0\}}{Inn(D,M)}$$

$$= \frac{\{f: G\to M : f(xy) = x\cdot f(y) - f(x)\}}{Inn(D,M)}$$

$Inn(G,M) = \{D: G\to M : \exists m\in M / D(g) = g\cdot m - m\}$

2-cociclos: $f: G\times G\to M$ /

$$xf(y,x) - f(xy,z) + f(x,yz) - f(x,y) = 0$$

Interpretación de $H^2(G,M)$

Consideremos

$$0\to M\to E\to G\to 1$$

una extensión de grupos con M abeliano, G arbitrario, y E arbitrario.

Por ejemplo

$$0\to\mathbb{Z}_p\to\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix} : a,b,c\in\mathbb{Z}_p\right\}\to\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$$

$$b\mapsto\begin{pmatrix}1&0&b\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\mapsto(a,b)$$

Es decir, $M\triangleleft E$, $E/M\cong G$. Tanto G como M son abelianos, pero E no es abeliano! (savo $p=2$). Vemos entonces que claramente M y G no determinan en general a E. ¿qué datos lo determinan?

Tomamos $e: G\to E$ una seccion conjuntista, $g\mapsto e_g\in E$, luego, como conjuntos (Lagrange) hay una biyección asociada

$$E\leftrightarrow M\times G$$

Todo elemento $w \in E$ admite una escritura única

$$w = me_g$$

$M \triangleleft E \Rightarrow eMe^{-1} \subseteq M \forall e \in E$, luego M tiene una acción de E. Pero M es abeliano, entonces M actúa trivialmente sobre sí mismo por conjugación y en consecuencia M tiene una acción de $G = E/M$. Es decir,

$$g \cdot m := e_g m e_g^{-1}$$

está bien definida. (Por eso necesitamos M abeliano, si M no es abeliano, la teoría es mucho más difícil.)

Ejercicio: La acción de G en M es trivial si y sólo si M es central en E.

La multiplicación en E se describe como

$$ww' = me_g m' e_{g'} = me_g m' e_g^{-1} e_g e_{g'}$$

$$= mg(m') e_g e_{g'}$$

Notar que $\pi : E \to G$ es de grupos $\Rightarrow$

$$E \ni e_g e_{g'} \mapsto gg' \in G \ \Rightarrow e_g e_{g'} = f(g, g') e_{gg'}$$

para alguna $f : G \times G \to M$. Luego

$$(mg)(mg') = mg(m') e_g e_{g'}$$

$$= mg(m')(e_g e_{g'} e_{gg'}^{-1}) e_{gg'}$$

$$= mg(m') f(g, g') e_{gg'}$$

Cambio notacional: cambiamos el conjunto E por $M \times G$, en M usamos notación aditiva

$$me_g \leftrightarrow (m, g)$$

Como M es subgrupo, se tiene:

$$(m, 1)(m', 1) = (m + m', 1)$$

La acción de G en M es por conjugación en E y está bien definida, por lo tanto:

$$(1, g)(m, 1)(1, g)^{-1} = (g(m), 1)$$

yn general, el producto está dado por

$$\boxed{(m, g)(n, h) = (m + g(n) + f(g, h), gh)}$$

Concluimos E esta determinado por

- la acción de G en M

- una cierta $f : G \times G \to M$

El siguiente Lema, cuya demostración dejamos como ejercicio, indica el camino a segir para mostrar la correspondencia $H^2 \leftrightarrow$ extensiones, de manera análoga a como hemos hecho para el caso de álgebras:

Lema 7.4.

1. *Dada $0 \to M \to E \to G \to 0$ y una sección conjuntista $G \to E$ que da la biyección $E \leftrightarrow M \times G$, por la asociatividad de f, tenemos que*

$$xf(y,z) + f(x,yz) = f(xy,z) + f(x,y)$$

2. *Dada M un $\mathbb{Z}[G]$-módulo y $f : G \times G \to M$ un 2-cociclo, la multiplicación en $E := M \times G$ dada por*

$$(m,x)(n,y) = (m + x \cdot n + f(x,y), xy)$$

es una ley de grupo y se tiene una extensión

$$0 \to M \to E \to G \to 1$$

3. *$0 \to M \to E \to G \to 1$ una extensión con M abeliano, s una sección $G \to E$, f el cociclo*

$$(0,x)(0,y) = (f(x,y), xy)$$

o bien

$$f(x,y) = s(x)s(y)s((xy)^{-1})$$

Si $\widetilde{s}$ es otra sección $\Rightarrow$ el 2-cociclo $\widetilde{f}$ es cohomólogo a f.

4. *Si $0 \to M \to E \to G \to 1$ y $0 \to M \to E' \to G \to 1$ son dos extensiones de G por M, entonces existe un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E' \arrow[r] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

si y sólo si los 2-cociclos respectivos f y f' son cohomólogos.

Concluimos:

Teorema 7.5. *Existe una biyección entre $H^2(G,M)$ y clases de equivalencia de extensiones de grupos de la forma*

$$0 \to M \to E \to G \to 1$$

La correspondencia es:

- *Si M es un G-módulo y $[f] \in H^2(G,M)$, la extensión es*

$$E = M \times G, \ (m,g) * (m',g') = (m + g(m) + f(g,g'), gg')$$

- *Si $0 \to M \to E \to G \to 1$ es una extensión con M grupo abeliano, entonces la acción de G en M está dada por*

$$g(m) = s(g)ms(g)^{-1}$$

donde $s : G \to E$ es una sección conjuntista de $E \to G$. La acción no depende de la s elegida. El 2-cociclo f es

$$f(g,g') = s(g)s(g')s(gg')^{-1}$$

Su clase $[f]$ en H^2 no depende de s.

Ejercicio: E un grupo con $|E| = p^n$ y n primo, muestre que E sucede en una extensión de la forma

$$0 \to M \to E \to G \to 1$$

donde $|M| = p^k$ con $0 < k < n$ es subgrupo invariante *central* (equivalentemente abeliano, con acción trivial de G) y $|G|^{p^{n-k}}$.

Aplicación: Se puede hacer un cálculo iterativo de grupos de orden p^n

Atención: Hay más de 10 millones de (clases de isomorfismo de) grupos de orden $512 = 2^9$ (hay 10.494.213 (GAP)).

Si $|E| = p^3$ y $M \cong \mathbb{Z}_p$, $|G| = |E/M| = p^2$.

- Si $G = C_{p^2}$ es cíclico, tenemos una resolución pequeña, el cálculo de $H^2(C_n, \mathbb{Z}_p)$ es fácil, pero además podemos chequear que el grupo E es necesariamente abeliano, tenemos entonces $E = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2}$ para un cociclo trivial y $E = \mathbb{Z}_{p^3}$ para un cociclo no trivial.

- si $G = C_p \times C_p \Rightarrow$ podemos usar Künneth para calcular

$$H^2(C_p \times C_p, \mathbb{Z}_p) = \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[C_p \times C_p]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) = \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[C_p]\otimes\mathbb{Z}[C_p]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$$
$$\cong (H^2(C_p, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Z}) \oplus (H^1(C_p, \mathbb{Z}_p) \otimes H^1(C_p, \mathbb{Z}_p)) \oplus (\mathbb{Z}_p \otimes H^2(C_p, \mathbb{Z}_p))$$

  Se tiene que $H^2(G, \mathbb{Z}_p)$ es un $\mathbb{Z}_p$ espacio vectorial de dimensión 3. Distintos cociclos dan lugar a distintas clases de equivalencia de extensiones, pero dentro de ellas, muchos grupos que aparecen en als extensiones son isomorfos entre sí (aunque no sean equivalentes sus extensiones -por ejemplo los múltiplos no nulos de una extensión dada). Se puede encontrar con este método una lista (con repeticiones pero exhaustiva) de todos los grupos no abelianos de orden p^3, que son 2:

  - Si $p = 2$ se tiene D_4 y $\mathcal{H} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$
  - Si $p > 2$, el grupo de Heisenberg $Heis(p)$ y el grupo afin de $\mathbb{Z}_{p^2}$ $Aff(\mathbb{Z}_{p^2})$:

$$Heis(\mathbb{Z}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

$$Aff(\mathbb{Z}_{p^2}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :\in GL_2(Z_{p^2}),\ a = 1 + kp : k \in \{0, 1, \cdots, p-1\} \right\}$$

8. (Co)homología de álgebras de Lie

Álgebras de Lie

Recordamos la noción de álgebra de Lie:

Definición 8.1. k anillo conmutativo. Una k-álgebra de Lie es un k-módulo $\mathfrak{g}$ junto con una operación k-bilineal $[-,-] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que es

- antisimétrica: $[x, y] = -[y, x]$
  (en característica 2 se pide $[x, x] = 0$)
- y verifica Jacobi:
  $$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

Observación 8.2. Jacobi equivale a

$$[x,\ [y, z]] = [[x, y],\ z] + [y\ , [x, z]]$$

si $ad_x = [x, -]$,

$$ad_x([y, z]) = [ad_x(y), z] + [y, ad_x(z)]$$

es decir, ad_x es una derivación de la oeración $[-,-]$.

Ejemplos

1. Si A es k-álgebra (asociativa) entonces
   $$[a, b] = ab - ba$$
   es una estructura de Lie en A.
2. $(A, *)$ una k-álgebra "general" (o sea, bilineal y nada más) entonces $\mathrm{End}_k(A)$ es k-álgebra asociativa, y por lo tanto de Lie y $\mathrm{Der}(A) \subset \mathrm{End}_k(A)$ es subálgebra de Lie (pero no subálgebra asociativa en general), donde
   $$\mathrm{Der}(A) = \{D : A \to A : D(a * b) = D(a) * b + a * D(b)\}$$
3. M variedad, $\mathfrak{X}(M) = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$
4. G grupo de Lie $\Rightarrow$ $Lie(G) = T_1G \cong X(G)^G \subset \mathfrak{X}(G)$ es un álgebra de Lie de dimensión finita (igual a la dimensión de G como variedad).

Ejemplos Matriciales

Las siguientes son todas álgebras de Lie que son subálgebras de matrices, correspondientes a espacios tangentes a grupos de Lie que son sugbrupos de $GL(n, k)$:

- $\mathfrak{sl}(n, k) = \{M \in M_n(k) : tr(M) = 0\} = T_1SL(n, k)$
- $\mathfrak{so}(n, k) = \{M \in M_n(k) : MM^t + M^tM = 0\} = T_1SO(n, k)$

- $\mathfrak{u}(n) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : MM^* + M^*M = 0\} = T_1U(n)$
- $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = T_1SU(n)$

Teorema 8.3 (Chevalley - Eilenberg '48)**.** *Si G un grupo de Lie conexo y compacto entonces*

$$H^\bullet_{DR}(G) = H^\bullet(\Omega^\bullet(G), d_{dR}) = H^\bullet(\Omega^\bullet(G)^G, d_{dR})$$

En particular, el cálculo depende sólo de $\mathfrak{g} = Lie(G) = T_1G$

$$(\Omega^\bullet(G)^G, d_{dR}) = (\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}^*), \partial_{CE})$$

que es un complejo de dimensión finita!

$$\Lambda^n\mathfrak{g}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^n\mathfrak{g}, \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}\partial(f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) &= \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \widehat{x_i} \wedge \cdots \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_{n+1})\end{aligned}$$

Veremos que el complejo anterior calcula un Ext sobre un álgebra asociativa naturalmente asociada a un álgebra de Lie

8.1. El álgebra envolvente universal

Si $\mathfrak{g}$ es de Lie, se define el **álgebra universal envolvente**

$$U(\mathfrak{g}) := T\mathfrak{g}/(x \otimes y - y \otimes x - [x, y] : x, y \in \mathfrak{g})$$

es una k-álgebra asociativa y tiene la propiedad universal:

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{k-alg}(U(\mathfrak{g}), A) = \mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, Lie(A))}$$

donde, si A es asociativa, $Lie(A) := (A, [,] = \textit{conmutador})$.

Resultará

$$H^\bullet(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}^*), \partial_{CE}) = \mathrm{Ext}^\bullet_{U\mathfrak{g}}(k, k)$$

Teorema 8.4. *(PBW: Poincaré-Birkhoff-Witt) Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie que sea libre como k-módulo, con base $\{x_i : i \in I\}$ donde $(I, <)$ es un conjunto* totalmente *ordenado. Entonces los monomios*

$$\{x_{i_1}^{n_{i1}} \cdots x_{i_k}^{n_{ik}} : k \in \mathbb{N}_0, i_1 < i_2 < \cdots < i_k, n_{i_j} \in \mathbb{N}\}$$

forman una base de $U(\mathfrak{g})$.

Observación 8.5. si k es cuerpo, $\mathfrak{g}$ es libre. $U(\mathfrak{g}) = T\mathfrak{g}/(J)$ por lo tanto $U(\mathfrak{g})$ es **filtrada**. Como en $U(\mathfrak{g})$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{y} \cdot \overline{x} = \overline{x \otimes y - y \otimes x} = \overline{[x, y]}$$

entonces $gr(U(\mathfrak{g}))$ es conmutativa. PBW dice que

$$gr(U(\mathfrak{g})) \cong k[\{x_i\}_{i \in I}]$$

$\mathfrak{g}$-módulos:

Definición 8.6. Un k-módulo M junto con una aplicación bilineal

$$\mathfrak{g} \times M \to M$$

$$(x, m) \mapsto x \cdot m$$

se dice un $\mathfrak{g}$-módulo si

$$x \cdot (y \cdot m) - y \cdot (x \cdot m) = [x, y] \cdot m$$

Observación 8.7. $\mathfrak{g}$-modulos $\equiv U(\mathfrak{g})$-módulos pues

$$\mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathrm{End}_k(M)) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(U\mathfrak{g}, \mathrm{End}_k(M))$$

Ejemplos:

1. $M = U(\mathfrak{g})$, es un módulo de dimensión infinita.
2. $M = \mathfrak{g}$ con $x \cdot y := [x, y]$, es un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita. Se denota $\mathfrak{g}^{ad}$.

$$x \cdot (y \cdot z) - y \cdot (x \cdot z) =$$

$$= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [[x, y], z]$$

$$= [x, y] \cdot z$$

3. $M = k$ con $x \cdot \lambda = 0$ es un g-módulo, se denomina el $\mathfrak{g}$-módulo trivial

Teorema 8.8. *si $\mathfrak{g}$ es k-libre, entonces la siguiente es una resolución $U(\mathfrak{g})$-libre de k:*

$$\cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to \cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} k \to 0$$

con diferencial

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n$$

y $\epsilon : U(\mathfrak{g}) \to k$ está determinado por $x \mapsto 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$.

En grados bajos:

$$d(u \otimes x \wedge y \wedge z) = ux \otimes y \wedge z - uy \otimes x \wedge z + uz \otimes x \wedge y$$

$$-u \otimes [x, y] \wedge z + u \otimes [x, z] \wedge y - u \otimes [y, z] \wedge x$$

$$d(u \otimes x \wedge y) = ux \otimes y - uy \otimes x - u \otimes [x, y]$$

$$d(u \otimes x) = ux$$

Demostración. (sketch) Observamos el complejo

$$\cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to \cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} k \to 0$$

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n$$

y chequeamos que

- d está bien definido, i.e. la fórmula es totalmente antisimétrica en $x_1, \ldots, x_n$ (ejercicio)
- $d^2 = 0$ (ejercicio, más largo que el caso simplicial)
- El complejo es filtrado y su graduado asociado es exacto, pues es el complejo de Koszul!

Veremos a continuación que si un complejo tiene una filtración exhaustiva y que empieza en un lugar, y su graduado asociado es exacto, entonces es exacto. Si $\mathfrak{g}$ es k-proyectiva, $\Lambda^k \mathfrak{g}$ también es k-proyectivo y por lo tanto cada término del complejo es $U(\mathfrak{g})$-proyectivo, y asumiendo el resultado sobre filtraciones, concluimos. □

Veamos el resultado sobre complejos filtrados. Comenzamos con las definiciones:

Definición 8.9. $(C_\bullet, d) \in \mathrm{Chain}(A)$ se dice **filtrado** si $\forall n$ se tiene dada una sucesión de submódulos $F_p(C_n)$ con

$$0 \subseteq \cdots \subseteq F_p(C_n) \subseteq F_{p+1}(C_n) \subseteq \cdots \subseteq C_n$$

y $d(F_p(C_n)) \subseteq F_p(C_{n-1})$ $\forall n, p$. Usaremos las siguientes calificaciones:

- La filtración es **exhaustiva** si $\bigcup_p F_p(C_n) = C_n$.
- La filtración es **Hausodorff** si $\bigcap_p F_p(C_n) = 0$.
- La filtración **empieza** en un momento si $\forall n\ \exists p_0 = p_0(n) : F_{p_0}(C_n) = 0$.

Definimos $gr(C_n) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} gr(C_n)_p := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \dfrac{F_p(C_n)}{F_{p-1}(C_n)}$ con diferencial $\overline{d}$

$$\overline{d}(c \ MOD \ F_{p-1}(C_n)) := d(c) \ MOD \ F_{p-1}(C_{n-1})$$

Teorema 8.10. *Si en $C_\bullet$ se tiene una filtración exhaustiva y que empieza y $(gr(C), \overline{d})$ es exacto, entonces (C, d) es exacto.*

Demostración. Sea $x \in C_n$ tal que $d(x) = 0$. Como es exhaustiva, existe $p : x \in F_p(C_n)$. Consideramos $\overline{x} \in gr(C_n)_p$

$$d(\overline{x}) = \overline{dx} = 0 \Rightarrow \exists \overline{y}_p \in gr(C_{n+1})_p : \overline{x} = d\overline{y}_p = \overline{dy_p}$$

$$\Rightarrow x = dy_p + z_{p-1} \qquad (z_{p-1} \in F_{p-1}(C_n))$$

Claramente $0 = dx = d(dy_p + z_{p-1}) = dz_{p-1}$.

Recursivamente podemos suponer que $z_{p-1} = d(alguien)$, pues $z_{p-1} \in F_{p-1}$ y la recursión termina porque la filtración empieza en algún momento. □

$$\cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to \cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} k \to 0$$

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n$$

$\rightsquigarrow$

$$\cdots \to S(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to \cdots \to S(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \to S(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to S(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} k \to 0$$

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$

8.2. Cohomología en grados bajos

Para el cálculo de $H_1(\mathfrak{g}, k)$, tomamos el complejo de Chevalley-Eilenberg:

$$\cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to \cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \to 0$$

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n$$

Al tensorizar por $k \otimes_{U(\mathfrak{g})} -$ obtenemos

$$\cdots \longrightarrow \Lambda^3 \mathfrak{g} \longrightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g} \xrightarrow{[-,-]} \mathfrak{g} \xrightarrow{0} k \longrightarrow 0$$

$\therefore H_1(\mathfrak{g}, k) = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. (Recordar/ejercicio: $H_1(G, \mathbb{Z}) = G/[G, G]$)

Con los mismos métodos dejamos como ejercicio verificar las siguentes fórmulas:

$$H^1(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)/\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g}, M)$$

donde

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M) = \{D : \mathfrak{g} \to M : D([x, y]) = x \cdot D(y) - y \cdot D(x)\}$$

$$\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g}, M) = \{D : \exists m_0 / D(x) = x \cdot m_0\}$$

En particular $H^1(\mathfrak{g}, k) = \{D : \mathfrak{g} \to k : D([x,y]) = 0\}$.

Si $f : \Lambda^2\mathfrak{g} \to M$ es 2-cociclo $\leftrightarrow$ $f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to M$ antisimétrica y

$$x \cdot f(y,z) - y \cdot f(x,z) + z \cdot f(x,y)$$
$$-f([x,y],z) + f([x,z],y) - f([y,z],x) = 0$$

8.3. H^2 y extensiones de álgebras de Lie

Sea $f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to M$ bilineal donde M es un $\mathfrak{g}$-módulo. En $M \oplus \mathfrak{g}$. escribmos m en vez de $(m,0)$ y x en vez de $(0,x)$. Se puede definir una operación asociada f y al corchete de $\mathfrak{g}$ de la siguiente manera ($m, m' \in M$, $x, y \in \mathfrak{g}$):

$$[m, m']_f = 0$$

$$[x, m]_f = x \cdot m = -[m, x]_f \qquad \in M$$
$$[x, y]_f = f(x,y) + [x,y] \qquad \in M \oplus \mathfrak{g}$$

De manera similar a la correspondencia de H^2 de grupos y extensiones con núcleo abeliano, dejamos como ejercicio la demostración de la siguiente proposición:

Proposición 8.11.
- *$[-,-]_f$ antisimétrica $\iff$ f es antisimétrica*
- *$[-,-]_f$ verifica Jacobi $\iff$ f es un-cociclo.*
- *en caso que $[-,-]_f$ verifica lo anterior (i.e. es un corchete de Lie) M resulta un ideal abeliano de $\mathfrak{e} := (M \oplus \mathfrak{g}, [-,-]_f)$, la estructura de $\mathfrak{g}$-módulo se recupera por $x \cdot m = [(0,x),(m,0)]_f$, y $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{e}/M$.*
- *Toda sucesión exacta de la forma*

  $$0 \to M \to \mathfrak{e} \to \mathfrak{g} \to 0$$

  donde $\mathfrak{e} \to \mathfrak{g}$ es morfismo de álgebras de Lie y M es un ideal abeliano de $\mathfrak{e}$, sucede de esta forma.

8.4. Álgebras de Lie simples y semisimples

El objetivo es demostrar un resultado funcamental sobre las representaciones de álgebras de Lie semisimples, que tiene varias demostraciones, pero la demostración utilizando herramientas de álgebra homológica es particularmente simple y general. Para ésto necesitamos ciertos pre-requisitos sobre álgebras de Lie y sus representaciones.

Definición 8.12. un **ideal** de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *simple* si no tiene ideales salvo 0 y $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}$ no es abeliana (excluyendo de esta manera el caso trivial cuando $\dim_k \mathfrak{g} = 1$)

Observación 8.13. $\mathfrak{g}$ simple $\Rightarrow \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. No hay simples en dimensión 2, pues $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = Im(\Lambda^2 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g})$.

Ejemplo / Ejercicio: $ch(k) \neq 2 \Rightarrow \mathfrak{sl}(2, k)$ es simple. Recordamos los corchetes, y la conveniencia de utilizar como base las siguientes matrices:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} c & -2a \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 2a & b \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ -2c & 0 \end{pmatrix}$$

Definición: Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *semisimple* si es isomorfa a un producto directo (con corchete coordenada a coordenada) de álgebras de Lie simples.

La forma de Killing

Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo, denotamos

$$x|_V := x \cdot - : V \to V$$

Si $\dim V < \infty$, se define la form bilineal en $\mathfrak{g}$ asociada a V a través de

$$b_V(x, y) = tr_V(x|_V \circ y|_V)$$

Por las propiedades de la traza se puede ver fácilmente que

$$b_V(x, y) = b_V(y, x)$$

$$b_V([x, y], z) = b_V(x, [y, z])$$

Si $V = \mathfrak{g}^{ad}$ se llama *forma de Killing* $\kappa(-, -)$.

Ejemplo 8.14. Calculamsos la form de Killing para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$: tommos como base

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

valen las fórmulas

$$[x, y] = h$$

$$[h, x] = 2x$$

$$[h, y] = -2y$$

Con estas constantes de estructura, podemos calcular la matriz de la forma bilineal, por ejemplo

$$b(x, x) = tr(\mathrm{ad}_x^2) = tr\Big(h \mapsto -2x \mapsto 0, x \mapsto 0 \mapsto 0, y \mapsto h \mapsto -2x\Big) = 0$$

$$b(x, y) = tr(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad} y) = tr\Big(h \mapsto [x, [y, h]] = 2h,\ x \mapsto [x, [y, x]] = 2x,\ y \mapsto [x, [y, y]] = 0\Big) = 2$$

etc. Dejamos como ejercicio calcular la matriz de la forma b en esta base. Podemos concluir que la forma de Killing es no degenerada, pero no definida.

Ejemplo 8.15. $\mathfrak{su}(2) = (\mathbb{R}^3, \times)$ base e_1, e_2, e_3, con corchete

$$[e_i, e_{i+1}] = e_{i+2} \qquad (Mod 3)$$

Dejamos como ejercicio ver que su forma de Killing es definida negativa, en particular es no degenerada, pero también esto muestra que $su(2) \not\cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (sin embargo, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$).

El Criterio de Cartan:

Mencionamos sin demostración el siguiente criterio de Cartán para $\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero

i) $\mathfrak{g}$ es semi-simple $\iff \kappa_{\mathfrak{g}}$ no-degenerada.

ii) Si $\mathfrak{g}$ en una subálgebra de Lie $M_n(k)$, entonces $\beta(x, y) := tr(xy)$ (la traza usual de matrices) también es no degenerada.

(ver Humphreys, Knapp, Bourbaki,...)
Veremos que si $\mathfrak{g}$ es **simple** y $\mathfrak{g} \subset M_n(k)$

$$\Rightarrow \beta = \lambda \kappa \qquad\qquad (0 \neq \lambda \in k)$$

8.5. El Casimir

El ingrediente fundamental en los cálculos cohomológicos es la acción de un elemento en particular llamado **el Casimir**, asociado a toda $\mathfrak{g}$ semisimple.

Definición 8.16. Si $\mathfrak{g}$ es ss, $x_1, \ldots, x_n$ una base, y sean $x^1, \ldots, x^n$ en $\mathfrak{g}$ tales que

$$\kappa(x_i, x^j) = \delta_i^j$$

se define el **Casimir**

$$\Omega := \sum_{i=1}^{n} x_i x^i \in U(\mathfrak{g})$$

Dejamos como ejercicio ver que Ω es independiente de la base elegida. En particular, $\Omega := \sum_{i=1}^n x_i x^i = \sum_{i=1}^n x^i x_i$.
A veces se considera $\Omega \in S^2(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.
Vale $x \in \mathfrak{g}$ y $[x_i, x] = \sum_j c_{ij} x_j \Rightarrow$

$$[x, x^j] = \sum_i c_{ij} x^i$$

Pues si $[x, x^j] = \sum_i a_{ij} x^i$, calculamos

$$a_{ij} = \kappa(x_i, [x, x^j]) = \kappa([x_i, x], x^j)$$

luego

$$\Omega \in Z(U\mathfrak{g})$$

$\therefore \forall$ $\mathfrak{g}$-módulo M, la multiplicación por Ω es $U(\mathfrak{g})$-lineal.

Lema 8.17. *(Schur) Sea S un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita y simple (i.e. los únicos $\mathfrak{g}$-submódulos son 0 y S). Si k es algebraicamente cerrado, entonces $\exists c_S \in k$ tal que*

$$\Omega|_S = c_S \mathrm{Id}_S$$

Notar que esto implica que $c_S \dim_k(S) = tr(\Omega|_S)$.

Demostración. Si S es de dimensión finita, como $\Omega|_S : S \to S$ es una transformación lineal y k es algebraicamente cerrado, tiene al menos un autovalor λ y como Ω es central en $U(\mathfrak{g})$,

$$\{v \in S : \Omega \cdot v = \lambda v\} \subset S$$

es un $\mathfrak{g}$-submódulo, que es no nulo, y por simplicidad necesariamente coincide con S. □

Mostraremos que S simple, entonces $S = k$ el módulo trivial es el **único** en donde $c_S = 0$.

8.6. Estructura monoidal de las representaciones

La cateoría de $\mathfrak{g}$-módulos (de manera análoga a la de representaciones de un grupo) tiene operaciones adicionales que producen nuevas representaciones a partir de otras. Si M y N son dos $\mathfrak{g}$-módulos, entonces

- $M \otimes N$ es naturalmente un $\mathfrak{g}$-módulo con la acción

  $$x \cdot (m \otimes n) = xm \otimes n + m \otimes xn$$

  y la trasposición $M \otimes N \cong N \otimes M$ es $\mathfrak{g}$-lineal.

- $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ es un $\mathfrak{g}$-módulo via

  $$(x \cdot f)(m) := xf(m) - f(xm)$$

  En particular M^* es $\mathfrak{g}$-módulo con $(x \cdot \phi)(m) = -\phi(xm)$.

- El morfismo natural

  $$M^* \otimes N \to \mathrm{Hom}_k(M, N)$$

  es de $\mathfrak{g}$-módulos.

- $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N) = \mathrm{Hom}_k(M, N)^{\mathfrak{g}}$

- M de dimensión finita $\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N) \cong (M^* \otimes N)^{\mathfrak{g}}$

- La descomposición en tensores simétricos y antisimétricos $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} = S^2\mathfrak{g} \oplus \Lambda^2\mathfrak{g}$ es también como $\mathfrak{g}$-módulos. Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonce el "casimir"

  $$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x^i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

  es simétrico e invariante, i.e. un elemento de $S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

- $((M \otimes N)^*)^{\mathfrak{g}}$=formas bilineales invariantes, donde b es invariante $\iff b([x, y], z) = b(x, [y, z])$

Algunos subespacios de invariantes en el caso $\mathfrak{g}$ simple y $k = \overline{k}$

Realizamos algunos cálculos con reprsentaciones e invariantes en el caso de $\mathfrak{g}$ simple:

- $M = \mathfrak{g}^{ad}$ es una representación simple entonces(Lema de Schur) $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 1$ tiene dimensión 1.
- $\mathfrak{g}^{ad} \cong \mathfrak{g}^*$, pues la forma de Killing provee de un morfismo no nulo

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*, \quad (x \mapsto \kappa(x, -))$$

  y como

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}) \cong (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \cong (\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$$

  todos tienen dimensión 1, por lo tanto $(S^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ tiene dimensión 1 y está generado por el Casimir (y colateralmente también se sigue que $(\Lambda^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = 0$, aunque no lo utilicemos ahora).

Ahora si $\mathfrak{g}$ es simple y M simple no trivial,

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(M) = M_m(k) \Rightarrow \mathfrak{g} \subset M_m(k)$$

produce una inmersión de $\mathfrak{g}$ como subálgebra de matrices. Recordando la parte correspondiente del criterio de Cartan tenemos

1. $\beta(x, y) = tr(x|_M \circ y|_M)$ es no degenerada entonces (Cartan) $\beta = \lambda\kappa$ para algún $0 \neq \lambda \in k$. Si $x_1, \dots, x_n$ una base de $\mathfrak{g}$ $\{y^1, \dots, y^n\}$ en $\mathfrak{g}$ satisfacen

$$\lambda\kappa(x_i, y^j) = \beta(x_i, y^j) = \delta_i^j \;\Rightarrow\; \widetilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} x_i y^i = \frac{1}{\lambda}\Omega$$

2. Sabemos que $\widetilde{\Omega}|_M = c\mathrm{Id}_M$ (Schur), luego

$$\sum_{i=1}^{n} x_i|_M \circ y^i|_M = c\mathrm{Id}_M \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} tr(x_i|_M \circ y^i|_M) = c \dim M$$

$$\Rightarrow c \dim M = \sum_{i=1}^{n} \beta(x_i, y^i) = \dim \mathfrak{g}$$

   Concluimos $\widetilde{\Omega} = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim M}\mathrm{Id} \neq 0 \Rightarrow \Omega|_M = c_M \mathrm{Id}$, $c_M \neq 0$. Es decir, $\Omega|_S$ es cero si S es la representación trivial, y $\Omega|_S$ es un múltiplo no nulo de la identidad si S es simple no trivial.

Con este resultado podemos demostrar los siguientes resultados fundamentales:

8.7. Lemas de Whitehead y Teorema de Weyl

Primer Lema de Whitehead

Lema 8.18. *Sea A un anillo, $\omega \in Z(A)$ un elemento central, M y N dos A-módulos, denotamos $\omega|_M$ y $\omega|_N$ la multiplicación por ω en M y N respectivamente:*

$$\omega|_M : M \to M$$

$$m \mapsto \omega \cdot m$$

Entonces

$$\omega|_{M*} = \omega|_N^* : \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N)$$

Como corolario, reemplazando M por una resolución, y calculando homología, tenemos

Corolario 8.19. *Mismas hipótesis y notaciones que el lema anterior, entonces*

$$\omega|_{M*} = \omega|_N^* : \mathrm{Ext}_A^n(M,N) \to \mathrm{Ext}_A^n(M,N)$$

Como corolario de esto y de las propiedades del Casimir se tiene:

Teorema 8.20. *M simple $M \neq k \Rightarrow H^\bullet(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{U\mathfrak{g}}(k,M) = 0$*

Demostración. El casimir actúa por un escalar no trivial en M, y por un escalar nulo en k, luego, en $\mathrm{Ext}^\bullet_{U\mathfrak{g}}(k,M)$, la acción del casimir es simultáneamente cero y un iso. □

Observación 8.21. $\mathfrak{g}$ simple $\Rightarrow \mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \Rightarrow H^1(\mathfrak{g}, k) = 0$.

El teorema anterior junto al cálculo de $H^1(\mathfrak{g}, k)$ nos lleva al primer Lema de Whitehead:

Teorema 8.22. *(Primer Lema de Whitehead) $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$ para todo M de dimensión finita.*

Demostración. Si $M = k$ es la observación, si M es simple no trivia, es el teorema anterior. Si M tiene dimensión finita y no es simple, entonces admite un submódulo simpe S y se tiene una sucesión exacta corta

$$0 \to S \to M \to M/S \to 0$$

Por un argumento inductivo en la dimensión, tenemos que $H^1(\mathfrak{g}, M/S) = 0$ y $H^1(\mathfrak{g}, S) = 0$ por se rS simple, luego $H?^1(\mathfrak{g}, M) = 0$ se sigue de la sucesión exacta larga asociada a la sucesión exacta corta anterior. □

Tenemos todos los ingredientes para mostrar uno de los resultados más importantes de la teoría de representacion de las álgebras de Lie semisimples:

El Teorema de Weyl

Teorema 8.23. *(Weyl) $\mathfrak{g}$ semisimple, $ch(k) = 0$, entonces todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión de dimensión finita es completamente reducible.*

En otras palabras, todo submódulo de un módulo de dimensión finita se complementa, o bien la cat. de $\mathfrak{g}$-módulos *de dimensión finita* es semisimple.

Demostración. Asumimos primero $\mathfrak{g}$ simple y $k = \overline{k}$. Vemos primero que

$$\mathrm{Ext}^1_{U\mathfrak{g}}(X, Y) \cong \mathrm{Ext}^1(k, \mathrm{Hom}_k(X, Y)) = H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(X, Y))$$

Si $\dim M < \infty$ $M_0 \subseteq M$ entonces

$$0 \to M_0 \to M \to M/M_0 \to 0$$

da un elemento de $\mathrm{Ext}^1_{U\mathfrak{g}}(M_0, M/M_0) = 0$. Esto dice que lal sucesión anterior se parte, luego M_0 se complementa en M. $\square$

Observación 8.24. Si $\mathfrak{g}$ no es semisimple, $\mathfrak{g} = g_1 \times \cdots \mathfrak{g}_r$, entonces $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}_1) \otimes \cdots \otimes U(\mathfrak{g}_r)$, el resultado sobre $H^1(\mathfrak{g}, -)$ (primer Lema de Whitehead) se sigue de la fórmula de Kunneth, y la demostración del teorema de Weyl sigue intacta. Si $k \neq \overline{k}$, entonces consideramos $\overline{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \otimes_k \overline{k}$ como $\overline{k}$-álgebra de Lie. Por e criterio de Cartan, $\overline{\mathfrak{g}}$ es semisimple como $\overline{k}$-álgebra. Tenemos que $U(\overline{\mathfrak{g}}) \cong U(\mathfrak{g}) \otimes \overline{k}$,

$$H^1(\mathfrak{g}, M) \otimes_k \overline{k} \cong= H^1(\mathfrak{g}, M \otimes \overline{k})$$

luego, es válido el Lema de Whitehead para $\mathfrak{g}$ y por lo tanto en teorema de Weyl.

Segundo Lema de Whitehead

Teorema 8.25. *(Segundo Lema de Whitehead) $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ si M tiene diemnsión finita.*

Demostración. Por un argumento de inducción en la dimensión y la sucesión exacta en la cohomología basta ver que $H^2(\mathfrak{g}, S) = 0$ si S es simple, cosa que ya sabemos para $S \neq k$. Si $S = k$, interpretamos $H^2(\mathfrak{g}, k)$ como extensiones y considermos una extensión e álgebras de Lie con núcleo abeliano isomorfo a k:

$$0 \to k \to \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$$

π morfismo de álgebras y $k = \mathrm{Ker}(\pi)$.

Si $e \in \mathfrak{e}$ y $x \in \mathfrak{g}$, sea $\widetilde{x} \in \mathfrak{e}$ tal que $\pi(\widetilde{x}) = x$. Definimos

$$x \cdot e := [\widetilde{x}, e]$$

$\Rightarrow$ está bien definido $\Rightarrow \mathfrak{e} \in \mathfrak{g} - mod$ y π es $\mathfrak{g}$-lineal.

Por el teorema de Weyl, admite sección $\mathfrak{g}$-lineal $s : \mathfrak{g}^{ad} \to \mathfrak{e}$

$$s([x, y]) = s(x \cdot_{ad} y) = x \cdot s(y) = [s(x), s(y)]$$

$\Rightarrow s$ es morfismo de álgebras $\Rightarrow H^2(\mathfrak{g}, k) = 0 \Rightarrow H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ si $\dim M < \infty$. $\square$

9. Lenguaje super

Dedicaremos este capítulo al llamado *lenguaje super*, que resulta muy cómodo para las construcciones del álgebra homológica. En general, la palabra super se puede referir cuando intervienen signos que suelen depender de la paridad en una $\mathbb{Z}$-graduación, por lo que las definiciones o nombres pueden hacerse tanto en el caso $\mathbb{Z}$-graduado como en el $\mathbb{Z}_2$-graduado. Tomaremos en principio la situación de una Z_2-graduación.

Definición 9.1. Un super k-espacio vectorial (o super k-módulo si k es anillo conmutativo) es un k-módulo M junto con una descomposición en suma directa

$$M_0 \oplus M_1$$

Los elementos de M_0 se dirán homomgéneos de grado par, los de M_1 se llamarán homogéneos de grado impar. No todo elemento en $M_0 \oplus M_1$ tiene asociado un grado, ya que no todo element es homogéneo, pero si es cierto que todo elemento de $M_0 \oplus M_1$ es *una suma* de elementos homogéneos. Muchas veces se dirán las definiciones sobre elementos homogéneos, siendo las definiciones de carater lineal, se sobre-entenderá que se extienden por linealidad para elementos que sean sumas de homogéneos.

Ejemplo 9.2. Si M es $\mathbb{Z}$-graduado, $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n$, esto induce una $\mathbb{Z}_2$-graduación

$$M_0 := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M^{2n}, \qquad M_1 := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M^{2n+1}$$

La mayoría de los ejemplos de interés son $\mathbb{Z}$-graduados.

9.1. Estructura monoidal: signos de Koszul

Si $f : (M_0 \oplus M_1) \to (N_0 \oplus N_1)$ es k-lineal, diremos que respeta la descomposición, o que respeta la paridad, o la $\mathbb{Z}_2$-graduación si

$$f(M_i) \subseteq N_i$$

Los super módulos, o módulos $\mathbb{Z}_2$-graduados, forman una categoría.

Si $M = M_0 \oplus M_1$ y $N = N_0 \oplus N_1$ son dos super-módulos, entonces el producto tensorial también

$$\begin{aligned} M \otimes N &= M_0 \otimes N_0 \oplus M_0 \otimes N_1 \oplus M_1 \otimes N_0 \oplus M_1 \otimes N_1 = \\ &= \underbrace{(M_0 \otimes N_0 \oplus M_1 \otimes N_1)}_{(M\otimes N)_0} \bigoplus \underbrace{(M_0 \otimes N_1 \oplus M_1 \otimes N_0)}_{(M\otimes N)_1} \end{aligned}$$

Sin embargo, y aquí es donde aparece de manera esencial la $\mathbb{Z}_2$-gradución, si $M = M_0 \oplus M_1$ y $N = N_0 \oplus N_1$ son dos super-módulos, entonces hay **dos isomorfismos naturales**

$$M \otimes N \cong M \otimes N$$

uno el flip usual

$$m \otimes n \mapsto n \otimes m$$

y el otro: **flip con signo**

$$\boxed{m \otimes n \mapsto (-1)^{|m||n|} n \otimes m}$$

donde $|m|$ = grado o paridad de m (resp. $|n|$).

Observación 9.3. si $|m|$ y $|n|$ están en $\mathbb{Z}$ y no en $\mathbb{Z}_2$, en la fórmula anterior sólo importa la paridad de la graduación.

9.2. Álgebras super conmutativas

Una super-k-álg. asociativa es lo mismo que una k-álgebra $\mathbb{Z}_2$ graduada, es decir, $A = A_0 \oplus A_1$ y el producto verifica

$$A_i \cdot A_j \subset A_{i+j} \ (i, j, i+1 \text{ módulo } 2)$$

Ejercicio: Si A tiene unidad 1_A, ésta necesariamente pertenece a A_0.

Una super álgebra A se dice **super-conmutativa** (o conmutativa en el sentido graduado) si

$$ab = (-1)^{|a||b|}ba$$

para todo par de elementos homogéneos a y b de A.

Ejemplo 9.4. $A = \Lambda V$= el álgebra exterior es super-conmutativa, con la graduación $|v| = 1\ \forall v \in V$.

Ejemplo 9.5. $A = k[x]$ con $|x| = 1$ es graduada con $|x| = 1$, pero no es super-conmutativa. Si tomamos $|x| = 2$ entonces $k[x]$ es **otra álgebra graduada**, y ésta, sí es super conmutativa.

Ejemplo 9.6. Si A y B son dos superálgebras, entonces en $A \otimes B$ hay **otro** producto, además del usual, dado por

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := (-1)^{|a'||b|} aa' \otimes bb'$$

Denotamos esta estructura de álgebra como $A \widehat{\otimes} B$.

Notar que

- $\widehat{\otimes}$ es el coproducto en la categoría de k-álgebras super conmutativas.
- si $A = A_0$ (i.e. $A_1 = 0$) entonces $A \widehat{\otimes} B = A \otimes B$.

Ejercicio: Si $V = V_0 \oplus V_1$ entonces definimos $\mathbb{S}(V) := S(V_0) \otimes \Lambda(V_1)$, es superconmutativa, y si A es super-conmutativa entonces

$$\mathrm{Hom}_{super-k-alg}(S(V_0) \otimes \Lambda(V_1), A) \cong \mathrm{Hom}_{super-k-mod}(V_0 \oplus V_1, A)$$

Es decir, $\mathbb{S}(V) = S(V_0) \otimes \Lambda(V_1)$ es super-conmutativa libre.

Observación 9.7. $\left.\begin{array}{c} V = V_0 \oplus V_1 \\ W = W_0 \oplus W_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{S}(V \oplus W) = \mathbb{S}(V) \widehat{\otimes}\, \mathbb{S}(W).$

9.3. Super álgebras de Lie

Un super módulo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ se dice una super-álgebra de Lie si se tiene un corchete $[-,-] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que verifica

- es homogéneo de grado cero:

$$[g_i, g_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$$

- es super anti-simétrico: $\forall x, y \in \mathfrak{g}$ homogéneos

$$[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$$

- y satisface super-Jacobi: $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ homogéneos,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{|x||y|}[y, [x, z]]$$

Observación 9.8. $\mathfrak{g}_0$ es super-subálgebra de Lie y álgebra de Lie en el sentido usual. $\mathfrak{g}_1$ NO es Lie usual, podría pasar $[x, x] \neq 0$!

Ejemplos

Sea $V = V_0 \oplus V_1$ un supermódulo entonces

$$\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V_0 \oplus V_1, V_0 \oplus V_1)$$

$$= \underbrace{\mathrm{End}(V_0) \oplus \mathrm{End}(V_1)}_{\mathrm{End}(V)_0} \bigoplus \underbrace{\mathrm{Hom}(V_0, V_1) \oplus \mathrm{Hom}(V_1, V_0)}_{\mathrm{End}(V)_1}$$

es una super-álgebra (o sea es un álgebra $\mathbb{Z}_2$ graduada) y si f y g son homogéneos definimos el super-conmutador

$$[f, g]_s := f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f$$

$(\mathrm{End}(V), [-, -]_s)$ es superálgebra de Lie.

9.4. Super-derivaciones

Sea $A = A_0 \oplus A_1$ una superálgebra (asociativa o no). Las super derivaciones

$$\mathrm{Der}_s(A) \subseteq \mathrm{End}(A)$$

se definen por $\mathrm{Der}_s(A) = \mathrm{Der}_s(A)_0 \oplus \mathrm{Der}_s(A)_1$ con

$$\mathrm{Der}_s(A)_n = \{D \in \mathrm{End}(A)_n : D(ab) = D(a)b + (-1)^{n|a|} aD(b)\}$$

Ejercicio: $\mathrm{Der}_s(A)$ es sub-superálgebra de Lie de $\mathrm{End}(A)$:

- $D \in \mathrm{Der}_s(A)_0$, $E \in \mathrm{Der}_s(A)_i$ con $i = 0, 1$, $\Rightarrow DE - ED \in \mathrm{Der}_s(A)_i$.
- $D, E \in \mathrm{Der}_s(A)_1 \Rightarrow DE + ED \in \mathrm{Der}_s(A)_0$.
  (o sea, derivación en el sentido usual)

Además, si D es impar, entonces el segundo item dice que $[D, D] = 2D^2$ es una derivación usual, pero también se puede mostrar directamente que D^2 es una derivación par, sin necesidad de invertir 2.

Demostración. mostraremos sólo parte de D^2. Sean a y b homogéneos,

$$D^2(ab) = D(D(ab)) = D(D(a)b) + D((-1)^{|D||a|}aD(b))$$

y como $|D|$ es impar

$$= D(D(a)b) + (-1)^{|a|}D(aD(b))$$

$$= D^2(a)b + (-1)^{|Da|}D(a)D(b) + (-1)^{|a|}\Big(D(a)D(b) + (-1)^{|a|}aD^2(b)\Big)$$

Como $|D(a)| = |D| + |a|$ y $|D|$ es impar, los términos con $D(a)D(b)$ se cancelan, y $((-1)^{|a|})^2 = 1$, por lo tanto

$$= D^2(a)b + aD^2(b)$$

como queríamos ver. □

9.5. Superálgebras de Lie y complejos

Sea $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ una superálgebra de Lie y $m \in \mathfrak{g}_1$ tal que

$$[m, m] = 0$$

Entonces $\partial_m = [m, -]$ verifica

- $\partial_m(\mathfrak{g}_n) \subseteq \mathfrak{g}_{n+1}$
- $\partial_m([x, y]) = [\partial_m(x), y] + (-1)^{|x|}[x, \partial_m(y)]$
- $\frac{1}{2} \in k \Rightarrow \partial_m^2 = 0$
- $[m, \mathfrak{g}] = \partial_m(\mathfrak{g}) \triangleleft Z_m$, $Z_m/\partial_m(\mathfrak{g})$ es super-Lie.

Demostración. El primer item es claro pues

$$\partial_m(\mathfrak{g}_n) = [m, \mathfrak{g}_n] \subseteq [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_n]$$

El segundo es exactamente la igualdad de Jacobi para m, x, y.

El tercer item se sigue de Jacobi:

$$\partial_m^2(x) = [m, [m, x]] = [[m, m], x] + (-1)^{|m||m|}[m, [m, x]]$$

Pero como $[m, m] = 0$ y $|m| = 1$ se tiene

$$[m, [m, x]] = -[m, [m, x]]$$

por lo tanto

$$0 = 2[m, [m, x]] = 2\partial_m^2(x)$$

Finalmente, si $x \in Z_m$, es decir, $[m, x] = 0$, e $y \in [m, \mathfrak{g}]$, es decir, $y = [m, z]$ para algún z, entonces

$$[y, x] = [[m, z], x] = [[m, z], x] + 0$$

$$= [[m, z], x] + (-1)^{|z|}[z, [m, x]] = [m, [z, x]] \in [m, \mathfrak{g}]$$

□

9.6. Coálgebras y coderivaciones

La noción de coálgebra es dual a la de álgebra, o mejor dicho pre-dual, ya que el dual de todo coálgebra es un álgebra, mientras que el dual de un álgebra es coálgebra sólo si cierta hipótesis de finitud es válida sobre el álgebra, o si el dual se hace en cierta forma restringida (como dual graduado, y en cada grado hay dimensión finita). La ventaja de trabajar con coálgebras es que muchas veces ciertas hipótesis de finitud que parecen necesarias con álgebras, desaparecen en el caso de coálgebras y las construcciones resultan más naturales. Por esa razón es conveniente pagar el precio de la falta de intución co-algebraica y, cuando resulte necesario, trabajar con coálgebras.

Definición 9.9. Una **coalgebra** sobre k es $(C, \Delta : C \to C \otimes C)$ que admite $\epsilon : C \to k$ verificando

- coasociatividad:
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{Id}"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

- counitariedad
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C \otimes C \arrow[d, "\epsilon\otimes\mathrm{Id}"] \\ C \arrow[r, "\cong"] & k \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\epsilon"] \\ C \arrow[r, "\cong"] & C \otimes k \end{tikzcd}$$

(son diagramas conmutativos)

Ejemplos

- $\dim_k A < \infty \Rightarrow C = A^*$ es coálgebra con $\Delta = m^*$ y $\epsilon = \mu^*$ donde $\mu : k \to A$ es la inclusión de k en A.

- Si $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ y $\dim_k A_n < \infty \forall n \Rightarrow$ el dual graduado
$$C = A' := \bigoplus_{n\geq 0} A_n^*$$
es coálgebra, graduada:
$$\Delta(C_n) \subseteq \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes C_q$$
(ojo $n \in \mathbb{N}_0$, si $n \in \mathbb{Z}$ no está garantizado)

- Si C es coálgebra, entonces C^* siempre es un álgebra.

  Filosofía: C^* es álgebra $\Rightarrow$ es probable que C sea coálgebra

- G grupo finito, $k[G]$ es álgebra, pero también coálgebra definiendo
$$\Delta\Big(\sum_{g\in G} \lambda_g g\Big) = \sum_{g\in G} \lambda_g g \otimes g$$
(y Δ es morfismo de álgebra)

- Dualmente, si G es un grupo *finito*, el álgebra k^G también es coálgebra definiendo

$$k^{G\times G} \cong (k^G \otimes k^G) \ni \Delta(f)(g,h) = f(g,h)$$

por ejemplo,

$$\Delta\delta_x = \sum_{g\in G} \delta_g \otimes \delta_{g^{-1}x}$$

- $A = O(M_n(k)) = k[x_{ij} : 1, j = 1\dots,n]$ una coálgebra via $\Delta : A \to A\otimes A =$ el ! morfismo de álgebras t.q.

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_k x_{ik}\otimes x_{kj}$$

- Si G es un subgruo (o submonoide) de $M_n(k)$ definido por ecuaciones $f_1, \cdots f_k$ (por ejemplo $SL_n(k) = \{\det = 1\}$)

  $\Rightarrow O(G) = O(M_n(k))/(f_1,\dots,f_k)$ (asumiendo radical) es coálgebra con

$$O(M_n(k)) \to O(G)$$

  un epi de coálgebras.

  Filosofía II: X conjunto, $O(X)$ es álgebra, si en X hay un producto asociativo $\Rightarrow$ en $O(X)$ hay un coproducto

9.7. La coálgebra co-libre T^cV

V k-esp vectorial y

$$C = k\oplus V\oplus V^{\otimes 2}\oplus\cdots\oplus V^{\otimes n}\oplus\cdots$$

Un elemento de $V^{\otimes n}$ lo escribimos como sumas de elementos de la forma $v_1\cdots v_n$. Definimos la *deconcatenación* como

$$\begin{aligned}\Delta(v_1\cdots v_n) &= 1\otimes v_1\cdots v_n + v_1\otimes v_2\cdots v_n+\cdots\\ &\qquad\cdots + v_1\cdots v_{n-1}\otimes v_n + v_1\cdots v_n\otimes 1\\ &= \sum_{i=0}^n v_1\cdots v_i\otimes v_{i+1}\cdots v_n \qquad \text{(por convención } v_0 = 1 = v_{n+1})\end{aligned}$$

Es coálgebra con $\epsilon(V^{\otimes n}) = 0\ \forall n\geq 1$. Si $\dim_k V<\infty \Rightarrow T^cV\cong$ dual graduado de TV^*.

9.8. Co-derivaciones

Si C es una coálgebra, se define *coderivación* como un morfismo k-lineal $D : C\to C$ que verifica

$$(D\otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id}\otimes D)\Delta = \Delta D$$

o equivalentemente, que $D^* : C^*\to C^*$ es una derivación.

Hecho: $Coder(C)\subset \mathrm{End}_k(C)$ es subálgebra de Lie.

Super Co-derivaciones

Si $C = \oplus_n C_n$ es una coálgebra graduada y $D : C \to C$ t.q. $D(C_n) \subseteq C_{n+p} \forall n$ se dice super coderivación si D^* es una super-derivación (de grado $-p$) de C' (el dual graduado de C), o equivalentemente

$$(D \otimes \mathrm{Id} + \pm \mathrm{Id} \otimes D)\Delta = \Delta D$$

donde $\pm \mathrm{Id}(c) := (-1)^{|c|} c$ para todo homogéneo c.

Hecho super: $Coder_s(C) := \bigoplus_p Coder_p(C)$
es super-álgebra de Lie (subálgebra de $\mathrm{End}(C)$)

9.9. Super Co-derivaciones y el complejo de Hochschild

Sea V un k-espacio vectorial, $T^c V$ = coálgebra graduada con $|V| = 1$.

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V) \cong \bigoplus_n Coder_{-n+1}(T^c V, T^c V)$$

Hecho dual: Consideramos TW como álgebra graduada,

$$\mathrm{Der}_p(TW, TW) \cong \mathrm{Hom}_k(W, W^{\otimes p+1})$$

Si $\dim V < \infty$, tomamos $W = V^*$, pero el iso es cierto aún en dimensión arbitraria.

Ejemplo 9.10. $f : V^{\otimes 2} \to V$. Consideramos $f : T^c V \to V$ con $m(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 0$ si $n \neq 2$ (escribimos $a_i \in V$).

$$\begin{array}{rcll}
D_f(a \otimes b) & = & f(a \otimes b) \ \in V & \\
D_f(a \otimes b \otimes c) & = & f(a \otimes b) \otimes c - a \otimes f(b \otimes c) \ \in V^{\otimes 2} & \\
D_f(a \otimes b \otimes c \otimes d) & = & f(a \otimes b) \otimes c \otimes d - a \otimes f(b \otimes c) \otimes d + a \otimes b \otimes f(c \otimes d) & \in V^{\otimes 3} \\
D_f(a \otimes b \otimes c \otimes d \otimes e) & = & f(a \otimes b) \otimes c \otimes d \otimes e - a \otimes f(b \otimes c) \otimes d \otimes e & \\
& & +a \otimes b \otimes f(c \otimes d) \otimes e - a \otimes b \otimes c \otimes f(d \otimes e) & \in V^{\otimes 4}
\end{array}$$

Esta extensón de $f : V^{\otimes 2} \to V$ primero viéndola como una aplicación $TV \to V$ (extendiendo por cero en los demás sumandos) y luego extendiendo como $D_f : TV \to TV$ verifica

$$\boxed{(D_f \otimes \mathrm{Id} + \pm \mathrm{Id} \otimes D_f)\Delta = \Delta D_f}$$

y $\boxed{p_V \circ D_f = f}$. Está unívocamente determinada por esas condiciones

Ejemplo 9.11. Si $TV = A$ es un álgebra y $f = m : A \otimes A \to A$ es la mutiplicación entonces

$$D_m = b'$$

Corolario 9.12. *Son equivalentes*

- $m : A^{\otimes 2} \to A$ *es un producto asociativo en* A.

- $D_m^2 = 0$.

Demostración. D_m^2 es coderivación de T^cV, de grado -2, se corresponde con $D : V^{\otimes 3} \to V$

$$D = D_m^2|_{V^{\otimes 3}} = \Big(a \otimes b \otimes c \mapsto ab \otimes c - a \otimes bc \mapsto (ab)c - a(bc) \Big)$$

Además, si $f : V^{\otimes n} \to V$, consideramos D_f y D_m,

$$[D_f, D_m] \in Coder(T^cV)_{-n} \cong \mathrm{Hom}(V^{\otimes n+1}, V)$$

$$\begin{aligned} [D_f, D_m](a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = f(D_m(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})) \\ -(-1)^{|D_f|} m(D_f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})) \end{aligned}$$

$$= f(b'(a_1 \otimes \cdots a_{n+1}))$$

$$-(-1)^{n-1} m\Big(f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1}) + (-1)^{n-1} a_1 \otimes f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \Big)$$

$$= f(b'(a_1 \otimes \cdots a_{n+1}))$$

$$+(-1)^n f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1}) - a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \Big)$$

$$= -\partial(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})$$

$$\boxed{\boxed{\therefore [D_f, D_m] = D_{-\partial f}}}$$

□

Corolario 9.13. *$A = (V, m)$ una k-álgebra asociativa entonces $C^bullet(A) = \bigoplus_n \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) \cong \bigoplus Coder{-n+1}$ es una super-álgebra de Lie, y su diferencial, a menos d esigno coincide con $[m, -]$. En particular $H^\bullet(A, A)[-1]$ es super-álgebra de Lie.*

Es decir, se tienen operaciones

$$[HH^p, HH^q] \subseteq HH^{p+q-2}$$

y verifica super Jacobi con respecto al grado $p - 1$ si un elemento esta en HH^p.

Para el caso $HH^1(A) = \mathrm{Der}(A)/\mathrm{InnDer}(A)$ es una subálgebra de Lie (usual), $\mathrm{Der}(A)$ actúa en toda la cohomología, como era de esperar "derivando" la acción del grupo de automorfismos, pero esta manera nos da gratis e resultado de que $\mathrm{InnDer}(A)$ actúa trivialmente en cohomolgía.

Además, el corchete da operaciones adicionales, por ejemplo $[HH^2, HH^2] \subseteq HH^3$, etc.

9.10. Supercoderivaciones y el complejo de Chevalley-Eilenberg

Sea V un k-espacio vectorial (de dimensión arbitraria), $\Lambda^c V=$ los tensores completamente antisimétricos. Afirmamos que $\Lambda^c V$ es una subcoálgebra de $T^c V$, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\Delta(+xyz) &= +1 \otimes xyz + x \otimes yz + xy \otimes z + xyz \otimes 1 \\
\Delta(-xzy) &= -1 \otimes xzy - x \otimes zy - xz \otimes y - xzy \otimes 1 \\
\Delta(-yxz) &= -1 \otimes yxz - y \otimes xz - yx \otimes z - yxz \otimes 1 \\
\Delta(+yzx) &= +1 \otimes yzx + y \otimes zx + yz \otimes x + yzx \otimes 1 \\
\Delta(+zxy) &= +1 \otimes zxy + z \otimes xy + zx \otimes y + zxy \otimes 1 \\
\Delta(-zyx) &= -1 \otimes zyx - z \otimes yx - zy \otimes x - zyx \otimes 1
\end{aligned}$$

y podemos chequear que si sumamos todas estas ecuaciones tenemos que la deconcatenacion de un elemento en Λ^{c3} nos da un elemento en $\Lambda^c \otimes \Lambda^c$. Dejamos el caso general como ejercicio.

Al igual que en el caso de $T^c V$, podemos mostrar que hay una biyección

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^c V, V) \cong Coder(\Lambda^c V)$$

en particular, el complejo de Chevalley a coeficientes en $\mathfrak{g}$ es de la forma

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^c \mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong Coder(\Lambda^c \mathfrak{g})$$

y su diferencial se puede definir como la única $d \in Coder_{-1}(\Lambda^c V)$ tal que $d|_{\Lambda^2 \mathfrak{g}} = [-,-] : \Lambda^2 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. También es posible mostrar que $d^2 = 0 \iff [-,-]$ verifica Jacobi.

Notar que automáticamente obtenemos que$(\Lambda \mathfrak{g}^*, d^*)$ es una d.g. algebra

10. Álgebras de Koszul

10.1. Álgebras cuadráticas y el candidato a resolución

Una k-álgebra presentada por generadores de un espacio vectorial V módulo relaciones, donde

$$A = TV/(R), \qquad R \subseteq V^{\otimes 2}$$

diremos que A es un álgebra con relaciones cuadráticas.

Primeros ejemplos:

- $k[x, y] = T(k \oplus ky)/(x \otimes y - y \otimes x)$
- $\Lambda(x, y) = T(kx \oplus ky)/(x \otimes x, x \otimes y + y \otimes x, y \otimes y)$
- $A = TV \ (R = 0)$;
- $A = k \oplus V$ con $V \cdot V = 0$ ($R = V^{\otimes 2}$)
- si $q \in k^\times$, $k_q[x, y] = k\langle x, y | xy = qyx\rangle$, se llama el *plano cuántico* de parámetro q, $R = k(x \otimes y - qy \otimes x)$.

Si $A = TV/(R)$ con $R \subseteq V^{\otimes 2}$ es un álgebra cuadrática, entonces es graduada y conexa,

$$A = k \oplus V \oplus \frac{V^{\otimes 2}}{R} \oplus \frac{V^{\otimes 3}}{V \otimes R + R \otimes V} \oplus \cdots$$

Se tiene la aumentación $\epsilon : A \to k$ inducida por

$$TV \to k$$

$$v \mapsto 0$$

k es A-módulo, queremos encontrar una resolución lo más pequeña posible de k como A-módulo. Empezamos por $\epsilon : A \to k \to 0$, como $\mathrm{Ker}\epsilon = \langle V\rangle$, podemos continuar con

$$A \otimes V \to A \to k \to 0$$

$$a \otimes v \mapsto av$$

cómo continuamos? Como $R \subseteq V^{\otimes 2}$, consideramos el mapa

$$A \otimes V^{\otimes 2} \to A \otimes V$$

$$a \otimes v \otimes w \mapsto av \otimes w$$

Si hacemos la composición

$$A \otimes V^{\otimes 2} \to A \otimes V \to A$$

$$a \otimes v \otimes w \mapsto av \otimes w \mapsto avw$$

no necesariamente da cero, pero si lo restringimos a $A \otimes R$ sí, pues

$$A \otimes R \longrightarrow A \otimes V \longrightarrow A$$

$$a \otimes (\sum_i v_i \otimes w_i) \mapsto \sum_i a v_i \otimes w_i \mapsto a(\sum_i v_i w_i) = 0$$

pues $\sum_i v_i \otimes w_i \in R$ y por lo tanto

$$0 = \sum_i v_i w_i \in TV/(R)$$

Por ahora tenemos un complejo

$$A \otimes R \to A \otimes V \to A \to k \to 0$$

Tomamos $A = TV$, $R = 0$, el complejo construido da simplemente

$$0 \to TV \otimes V \to TV \to k \to 0$$

es una resolución!

Si $A = k[x,y] = T(kx \oplus ky)/(x \otimes y - y \otimes x)$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes R \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \otimes V \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
A \otimes (x \otimes y - y \otimes x) \arrow[r] & A \otimes x \oplus A \otimes y \arrow[r] & A \arrow[r] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$a \otimes (x \otimes y - y \otimes x) \longmapsto ax \otimes y - ay \otimes x \qquad a \longmapsto \epsilon(a)$$

$$a \otimes x + b \otimes y \longmapsto ax + by$$

Si $A = k \oplus V$ con $V \cdot V = 0$, o sea $R = V^{\otimes 2}$,

$$\begin{tikzcd}
A \otimes R \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \otimes V \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
(k \oplus V) \otimes V^{\otimes 2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (k \oplus V) \otimes V \arrow[r] \arrow[d, equal] & (k \oplus V) \arrow[r] \arrow[d, equal] & k \arrow[r] & 0 \\
k \otimes V^{\otimes 2} \arrow[ddr, "\cong"] & k \otimes V \arrow[ddr, "\cong"] & k \arrow[ddr, "\cong"] & & \\
\oplus & \oplus & \oplus & & \\
V \otimes V^{\otimes 2} & V \otimes V & V & k &
\end{tikzcd}$$

es exacto! ¿cómo continuar?

$$? \to A \otimes R \to A \otimes V \to A \to k \to 0$$

Podemos definir

$$R_3 := (R \otimes V) \cap (V \otimes R) \subseteq V^{\otimes 3}$$

y entonces la restricción a $A\otimes R_3$ nos da un morfismo en el objeto deseado:

$$\begin{tikzcd} A\otimes R_3 \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook] & A\otimes R \arrow[d, hook] \\ A\otimes V^{\otimes 3} \arrow[r] & A\otimes V^{\otimes 2} \end{tikzcd}$$

$$a\otimes u\otimes v\otimes w \longmapsto au\otimes v\otimes w$$

En el ejemplo $k[x,y]=TV/(x\otimes y-y\otimes x)$, $R_3=0$, así que tenemos el candidato a resolución

$$0\to A\otimes R\to A\otimes V\to A\to 0$$

En tres variables,

$$k[x,y,z]=T(kx\oplus ky\oplus kz)/(x\otimes y\text{-}y\otimes x,\ x\otimes z\text{-}z\otimes x,\ y\otimes z\text{-}z\otimes y),$$

$$R_3=kVol_3, \qquad Vol_3=\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\sigma}x_{\sigma 1}\otimes x_{\sigma 2}\otimes x_{\sigma 3}$$

y tenemos la resolución de Koszul de $k[x,y,z]$, llamando $x\wedge y=x\otimes y-y\otimes x$, etc

$$A\otimes Vol_3\to A\otimes(kx\wedge y\oplus k\otimes y\wedge z\oplus k\otimes z\wedge x)\to A\otimes V\to A\to k\to 0$$

Motivados por esta construcción, definimos:

$$R_0=k, \quad R_1=V, \quad R_2=R\subseteq V^{\otimes 2}$$

y para $n\geq 2$:

$$\boxed{R_n:=\bigcap_{i+j+2=n}V^{\otimes i}\otimes R\otimes V^{\otimes j}}\subseteq V^{\otimes n}$$

y $d:A\otimes R_n\to A\otimes R_{n-1}$ definido restricción de $A\otimes V^{\otimes n}\to A\otimes V^{\otimes n-1}$:

$$\begin{tikzcd} A\otimes R_n \arrow[r, dashed, "d"] \arrow[d, hook] & A\otimes R_{n-1} \arrow[d, hook] \\ A\otimes V^{\otimes n} \arrow[r] & A\otimes V^{\otimes n-1} \end{tikzcd}$$

$$a\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_n \longmapsto av_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n$$

Definición 10.1. Para $A=TV/(R)$ con $R\subseteq V^{\otimes 2}$, el complejo

$$\cdots\to A\otimes R_n\to\cdots\to A\otimes R_3\to A\otimes R\to A\otimes V\to A\to k\to 0$$

se denomina el **complejo de Koszul** de A.

Diremos que A es (cuadrática) Koszul si su complejo de Koszul es exacto.

Observación 10.2. Cada proyectivo de la resolución en el lugar n (es libre) es *graduado y generado en grado* n, pues es $A\otimes R_n$. Estas condicion es otra posible definición (que resulta equivalente) de Koszulidad.

Ejemplos:

1. $k[x_1,\dots,x_n]$, $k\oplus V$ y TV.
2. El plano cuántico: si $q\in k^\times$, $A=k_q[x,y]=k\{x,y\}/(xy-qyx)$ es Koszul, la resolución tiene largo 2:
$$0\to A\otimes(x\otimes y-qy\otimes x)\longrightarrow A\otimes x\oplus A\otimes y\longrightarrow A\to k\to 0$$
$$a\otimes(x\otimes y-qy\otimes x)\mapsto ax\otimes y-qay\otimes x$$
3. Uno menos trivial es $A=k\langle a,b,c,d\rangle$ con relaciones
$$ab=qba,\ ac=qca,\ ad-da=(q-q^{-1})bc,$$
$$bc=cb,\ bd=qdb,\ cd=qdc$$
4. $A=k\{x,y\}/(x^2,yx)$ NO es Koszul.
(Es Noetheriana de un lado pero no del otro!)

Observación 10.3. A Koszul $\Rightarrow \mathrm{Tor}_n^A(k,k)=R_n$, $\mathrm{Ext}_A^n(k,k)=(R_n)^*$ (en particular tienen la misma dimensión).

Sabemos que $\mathrm{Ext}_A^\bullet(k,k)$ es un álgebra, es $k\oplus V\oplus R\oplus R_3\oplus\cdots$ una coálgebra? Se puede comprobar que efectivamente
$$R_\bullet:=\bigoplus_{n\geq 0}R_n\subseteq T^cV$$
es sub-coálgebra con la deconcatenación. Más fácil, veremos el álgebra dual-Koszul $A^!$ asociada a A

10.2. El dual de Koszul

$A=TV/R$ con $R\subseteq V^{\otimes 2}$ es graduada
$$A=\bigoplus_{n\geq 0}A_n=k\oplus V\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n\oplus\cdots$$
donde $A_2=V^{\otimes 2}/R$ y para $n>2$,
$$A_n=\frac{V^{\otimes n}}{\sum\limits_{i+j=n-2}V^{\otimes i}\otimes R\otimes V^{\otimes j}}$$
El morfismo natural
$$V^*\otimes V^*\to(V\otimes V)^*$$
$$\phi\otimes\psi\mapsto\Big(v\otimes v'\mapsto\phi(v)\psi(v')\Big)$$
siempre inyectivo, es iso si $\dim_k V<\infty$.

Asumimos $\dim_k V<\infty$ e identificamos $V^*\otimes V^*\cong(V\otimes V)^*$. De la s.e.c.
$$0\to R\to V^{\otimes 2}\to V^{\otimes 2}/R\to 0$$
tenemos
$$0\to\left(V^{\otimes 2}/R\right)^*\to(V^*)^{\otimes 2}\to R^*\to 0$$
Identificamos $(V^{\otimes 2}/R)^*\cong R^0\subset(V^*)^{\otimes 2}$.

Definición 10.4. Si $A = TV/(R)$

$$\boxed{A^! := T(V^*)/(R^0)}$$

Observación 10.5. $A^!$ es cuadrática

Observación 10.6. $\dim V < \infty \Rightarrow (A^!)^! \cong A$ (via $V^{**} \cong V$)

Ejemplo 10.7.

A	$A^!$
$S(V)$	$\Lambda(V^*)$
TV	$k \oplus V^*$
$k\langle x, y \vert xy = qyx\rangle$	$k\langle X, Y \vert X^2 = 0 = Y^2, XY = -q^{-1}YX\rangle$

Observación 10.8. justo en estos ejemplos $\dim A^! < \infty$, eso significará $gldimA < \infty$

Proposición 10.9. $\dim_k V < \infty \Rightarrow A^!$ *es el dual graduado de* $R_\bullet$ *y viceversa:*

$$A^! = \bigoplus_{n\geq 0} R_n^*, \qquad \bigoplus_{n\geq 0} R_n \cong \bigoplus_{n\geq 0} (A_n^!)^* =: A^{¡}$$

Demostración: Primero observamos

$$A^! = k \oplus V^* \oplus A_2^! \oplus \cdots \oplus A_n^! \oplus \cdots$$

donde

$$A_2^! = (V^*)^{\otimes 2}/R^0 \cong R^* \boxed{\Rightarrow A_2^{!*} \cong R^{**} \cong R}$$

$$\text{y para } n > 2: \qquad A_n^! = \frac{(V^*)^{\otimes n}}{\sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}}$$

$$A^! = k \oplus V^* \oplus R^* \oplus \cdots \oplus \frac{(V^*)^{\otimes n}}{\sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}} \oplus \cdots$$

Veamos unas fórmulas de álgebra lineal para mostrar

$$\left(\frac{(V^*)^{\otimes n}}{\sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}}\right)^* \cong \bigcap_{i+j=n-2} V^{**\otimes i} \otimes R^{**} \otimes V^{**\otimes j}$$

Supondremos ahora todos los espacios vectoriales de dim finita.

$$S, T \subseteq V \Rightarrow 0 \to (S+T) \xrightarrow{i} V \to \frac{V}{S+T} \to 0$$

$$\Rightarrow 0 \to \left(\frac{V}{S+T}\right)^* \to V^* \xrightarrow{i^*} (S+T)^* \to 0$$

Pero $i^* = |_{S+T} \Rightarrow \operatorname{Ker}(i^*) = (S+T)^0 = S^0 \cap T^0$ y tenemos

$$0 \to S^0 \cap T^0 \to V^* \xrightarrow{i^*} (S+T)^* \to 0$$

Ahora veamos formulas similares pero junto con $\otimes$.

Sean $S \subset V$, W y W' dos espacios vectoriales,

$$0 \to S \to V \to V/S \to 0$$

$$0 \to S^0 \to V^* \to S^* \to 0$$

+ exactitud $\otimes$

$$0 \to W \otimes S \otimes W' \to W \otimes V \otimes W' \to W \otimes V/S \otimes W' \to 0$$

luego

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (W \otimes V/S \otimes W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & (W \otimes V \otimes W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & (W \otimes S \otimes W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & W^* \otimes (V/S)^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & W^* \otimes V^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \otimes S^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & W^* \otimes S^0 \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & W^* \otimes V^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \otimes S^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & W^* \otimes S^0 \otimes (W')^* \arrow[r] & W^* \otimes V^* \otimes (W')^* \arrow[r] & \dfrac{W^* \otimes V^* \otimes (W')^*}{W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y si volvemos a dualizar

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \left(\dfrac{W^* \otimes V^* \otimes (W')^*}{W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*}\right)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & (W^* \otimes V^* \otimes (W')^*)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & \left(W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*\right)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*\right)^0 \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & W^{**} \otimes V^{**} \otimes (W')^{**} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & \left(W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*\right)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*\right)^0 \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & W^{**} \otimes V^{**} \otimes (W')^{**} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & W^{**} \otimes (S^0)^* \otimes (W')^{**} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*\right)^0 \arrow[r] & W \otimes V \otimes W' \arrow[r] & W \otimes (V/S) \otimes W' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Concluimos

$$\boxed{\left(W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*\right)^0 \cong W \otimes S \otimes W'}$$

Aplicación a $A^!$

$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$,

$$0 \to \sum_{i+j=n-2} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j} \to V^{\otimes n} \to A_n \to 0$$

$A^! = \bigoplus_{n\geq 0} A^!_n$,

$$0 \to \sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j} \to (V^*)^{\otimes n} \to A^!_n \to 0$$

Dualizando,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (A^!_n)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & \left((V^*)^{\otimes n}\right)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & \Big(\sum\limits_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}\Big)^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigcap\limits_{i+j=n-2} \left((V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}\right)^0 \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & V^{\otimes n} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & \Big(\sum\limits_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}\Big)^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigcap\limits_{i+j=n-2} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j} \arrow[r] & V^{\otimes n} \arrow[r] & \Big(\sum\limits_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}\Big)^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Reencontramos entonces

$$A^{!\,*}_n \cong R_n = \bigcap_{i+j+2=n} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j} \subseteq V^{\otimes n}$$

Corolario 10.10. $A^! = \bigoplus_n A^!_n$ *es cociente de* $TV \Rightarrow$ *su dual graduado*

$$\Rightarrow A^{\text{¡}} := \bigoplus_n (A^!_n)^* = \bigoplus_n R_n \subseteq T^cV$$

es sub co-álgebra de T^cV *con la deconcatenación.*

10.3. Koszulidad y la resolución standard

Recordamos

$$\cdots A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \xrightarrow{b'} \cdots \to A \otimes A \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$$

la resolución de A como A-bimódulo.

$$A^{\text{¡}}_n = R_n = \bigcap_i V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{n-i-2} \subseteq V^{\otimes n} \subseteq A^{\otimes n}$$

lo que nos induce un morfismo de A-bimódulos

$$A \otimes A^{\text{¡}}_n \otimes A \hookrightarrow A \otimes V^{\otimes n} \otimes A \hookrightarrow A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$$

Nos preguntamos qué diferencial poner (si es que se puede) en en $A \otimes A^{\text{¡}}_\bullet \otimes A$ para tener un morfismo de complejos.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & A \otimes A^{\text{¡}}_n \otimes A \arrow[r, dashed, "?"] \arrow[d, equal] & A \otimes A^{\text{¡}}_{n-1} \otimes A \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots & A \otimes \Big(\bigcap\limits_{i+j=n-2} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^j\Big) \otimes A \arrow[d, hook] & A \otimes \Big(\bigcap\limits_{i+j=n-3} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^j\Big) \otimes A \arrow[d, hook] & \cdots \\
\cdots & A \otimes V^{\otimes n} \otimes A \arrow[d, hook] & A \otimes V^{\otimes n-1} \otimes A \arrow[d, hook] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \arrow[r, "b'", "= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i"'] & A \otimes A^{\otimes n-1} \otimes A \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\forall 0 < i < n: \ b_i|_{A\otimes R_n\otimes A} = b_i|_{A\otimes V^{\otimes i-1}\otimes R\otimes V^{\otimes j}\otimes A} \equiv 0!$$

$\therefore$ el diferencial está inducido por

$$A\otimes V^{\otimes n}\otimes A \xrightarrow{d=b'|} A\otimes V^{\otimes n-1}\otimes A$$

$$\begin{aligned} a\otimes v_1\otimes\cdots v_n\otimes b \mapsto\ & av_1\otimes v_2\otimes\cdots v_n\otimes b \\ & +(-1)^n a\otimes v_1\otimes\cdots v_{n-1}\otimes v_n b \end{aligned}$$

observamos que el sumando de la izq. es exactamente el diferencial familiar de Koszul, el de la derecha es el análogo, pero con signo alternado. En grados bajos:

$$\cdots \longrightarrow A\otimes R\otimes A \longrightarrow A\otimes V\otimes A \longrightarrow A\otimes A \xrightarrow{m} A$$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum a\otimes r\otimes r'\otimes b \longmapsto\ & \textstyle\sum ar\otimes r'\otimes b \\ & \textstyle +\sum a\otimes r\otimes r'b \end{aligned}$$

$$a\otimes v\otimes b \longmapsto av\otimes b - a\otimes vb$$

Teorema 10.11. *Son equivalentes:*

1. *El complejo* $K_{bi}(A) = A\otimes A^{\text{!`}}_\bullet\otimes A$ *es acíclico,*

$$\cdots \to A\otimes R_3\otimes A \to A\otimes R\otimes A \to A\otimes V\otimes A \to A\otimes A \to A \to 0$$

2. *El complejo de Koszul a izq.* $K_\ell(A) = A\otimes A^{\text{!`}}_\bullet$ *es acíclico,*

$$\cdots \to A\otimes R_3 \to A\otimes R \to A\otimes V \to A \xrightarrow{\epsilon} k$$

3. *El complejo del otro lado* $K_r(A) = A^{\text{!`}}_\bullet\otimes A$ *es acíclico.*

$$\cdots \to R_3\otimes A \to R\otimes A \to V\otimes A \to A \xrightarrow{\epsilon} k$$

4. *La inclusión* $A\otimes A^{\text{!`}}_\bullet\otimes A \to C_\bullet(A,A)$ *es un q-iso.*

Corolario 10.12. *A Koszul* $\Rightarrow \forall M\in$ *A-Mod, M admite la resolución (funtorial)*

$$K_{bi}(A)\otimes_A M \cong A\otimes R_\bullet\otimes M$$

y gldimA $\leq$ *el máximo grado* $n/\ A^!_n \neq 0$.

Pero $\mathrm{Ext}^n_A(k,k) = A^!_n$, por lo tanto también concluimos

Corolario 10.13. $\dim V < \infty$*, A Koszul*

$$\Rightarrow gldim(A) < \infty \iff \dim_k A^! < \infty$$

En ese caso, gldim(A)= el máximo grado tal que $n\ /\ A^!_n \neq 0$.

A su vez, utilizando las equivalencias con el complejo $K_{bi}(A)$ también claramente obtenemos

Corolario 10.14. *A Koszul a izq* $\iff$ *A Koszul a derecha*

10.4. Koszulidad de A vs de $A^!$

Nos situamos en la condición $A = TV/(R)$, $\dim V < \infty$. El complejo de Koszul de A a izquierda es

$$K_\ell(A) = (A \otimes A^{¡}_\bullet, d_A)$$

En grado homológico n tiene $A \otimes A^{¡}_n$ y en grado interno $n+m$: $A_m \otimes A^{¡}_n$. El complejo de $A^!$ a derecha es

$$K_r(A^!) = (A^*_\bullet \otimes A^!, d_{A^!})$$

en grado homológico m es $A^*_m \otimes A^!$ y en grado interno $m+n$ tiene $A^*_m \otimes A^!_n$

Observamos $A^*_m \otimes A^! = (A_m \otimes A^{¡}_n)^*$ y $d_{A^!} = (d_A)^*$

Corolario 10.15. *A es Koszul $\iff$ $A^!$ lo es.*

Ejemplo 10.16. ΛV, $k_q[x,y]^! = k\langle x, y : x^2 = 0 = y^2, xy = -q^{-1}yx\rangle$, son Koszul.

10.5. Construcciones bar y cobar

Definiremos un funtor B (bar) de la categoría de álgebras aumentadas $\epsilon : A \to k$ en coálgebras d.g. Fijamos $\epsilon : A \to k$ un morfismo de álgebras (aumentación)

$$A = k1 \oplus \mathrm{Ker}\epsilon = k1 \oplus \overline{A}$$

$\overline{A} = A/k1 \cong \mathrm{Ker}\epsilon$.

$B(A)$ **como coálgebra:** $B(A) := T^c\overline{A}$ la coálgebra tensorial en $\overline{A}$ con la deconcatenación como comultiplicación

$$\Delta(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_i \otimes a_{i+1}|\cdots|a_n \in T^c\overline{A} \otimes T^c\overline{A}$$

esta notación es el origen del nombre "bar".

$$\Delta(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_i \otimes a_{i+1}|\cdots|a_n \in \bigoplus_{i+j=n} (T^c\overline{A})_i \otimes (T^c\overline{A})_j$$

convención: $a_0 = 1 = a_{n+1}$. Es una coálgebra **graduada**.

Ejemplo 10.17. si $a|b|c \in \overline{A}^{\otimes 3} \subset T^c\overline{A}$,

$$\Delta a|b|c = 1 \otimes a|b|c + a \otimes b|c + a|b \otimes c + a|b|c \otimes 1$$

Hecho: Si consideramos la graduación $deg\overline{A} = 1$, entonces

$$b'(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_i a_{i+1}|\cdots|a_n, \qquad b'(a) = 0$$

es una super co-derivación.

(Notar $a_i, a_{i+1} \in \mathrm{Ker}\epsilon \Rightarrow a_i a_{i+1} \in \mathrm{Ker}\epsilon \Rightarrow b'$ bien definida.

Ejemplo si $a|b|c \in \overline{A}^{\otimes 3} \subset T^c\overline{A}$,

$$(b' \otimes 1 \pm 1 \otimes b')\Delta(a|b|c)$$
$$= (b' \otimes 1 \pm 1 \otimes b')\Big(1 \otimes a|b|c + a \otimes b|c + a|b \otimes c + a|b|c \otimes 1\Big)$$
$$= b'(1) \otimes a|b|c + b'(a) \otimes b|c + b'(a|b) \otimes c + b'(a|b|c) \otimes 1$$
$$+1 \otimes b'(a|b|c) - a \otimes b'(b|c) + a|b \otimes b'(c) - a|b|c \otimes b'(1)$$

$$= +ab \otimes c + ab|c \otimes 1 - a|bc \otimes 1$$
$$+1 \otimes ab|c - 1 \otimes a|bc - a \otimes bc$$

$$\Delta(b'(a|b|c)) = \Delta(ab|c) - \Delta(a|bc)$$
$$= ab|c \otimes 1 + ab \otimes c + 1 \otimes ab|c - a|bc \otimes 1 - a \otimes bc - 1 \otimes a|bc$$

Hecho: $H_\bullet(T^c\overline{A}, b') = \mathrm{Tor}_\bullet^A(k,k)$, luego $\mathrm{Tor}_\bullet^A(k,k)$ es naturalmente una coálgebra.

Demostración. Para una k-álgebra general (no necesariamente aumentada) tenemos

$$Deg(A)_n := \langle a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1} \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} A \otimes A^{i-1} \otimes k1 \otimes A^{n-i} \otimes A \subseteq A \otimes A^{\otimes n} \otimes A = C_n(A)$$

es un subcomplejo (de todas las degeneraciones), y el cociente

$$\overline{C}_n(A) := C_n(A)/Deg_n(A) \cong A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A$$

donde $\overline{A} = A/k1$ como k-módulo, es un complejo con la misma homología (hay un ejercicio guiado para este caso particular, aunque es un resultado general de objetos simpliciales). Lo usamos como resolución de A como A^e-módulo.

$$\cdots \to A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A \to \cdots \to A \otimes \overline{A} \otimes A \to A \otimes A \to A \to 0$$

En el caso A aumentada tomamos $\equiv$Kerϵ. Tensorizando por $- \otimes_A k$ tenemos

$$\cdots \to A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes k \to \cdots \to A \otimes \overline{A} \otimes k \to A \otimes k \to k \to 0$$

$$d(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1$$
$$+a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes \epsilon(a_n)$$

o bien

$$\cdots \to A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \to \cdots \to A \otimes \overline{A} \to A \not\to k \to 0$$

Es una resolución de k. Al calcular $k \otimes_A -$ queda

$$\cdots \to k \otimes \overline{A}^{\otimes n} \to \cdots \to k \otimes \overline{A} \to k \to 0$$

que es isomorfa a $(T^c\overline{A}, b')$. Si $A = TV/(R)$ es cuadrática Koszul, entonces la inclusión

$$\begin{tikzcd} R_\bullet \arrow[r, equal] \arrow[rrr, bend left] & A^{¡} \arrow[r, hook] & T^cV \arrow[r, hook] & (T^c\overline{A}, b') = B(A) \end{tikzcd}$$

es un quasi-isomorfismo, donde a $R_\bullet$ se la considera una coálgebra d.g. con $d = 0$. $\square$

Proposición 10.18. *$A^{¡} \hookrightarrow B(A)$ es un q-iso si y solo si A es Koszul.*

Demostración. Si A es Koszul $\Rightarrow$ ok. Recíprocamente, si $A^{¡} \hookrightarrow B(A)$ es un q-iso queremos ver que

$$(A \otimes A^{¡}_{\bullet}, d_K) \to (A \otimes \overline{A}^{\otimes \bullet}, b')$$

es un q-iso. Equivale a ver que el cono es acíclico. Recordamos $Co = (A \otimes A^{¡}_{\bullet+1} \oplus A \otimes \overline{A}^{\bullet}, d)$. Si filtramos por grado en $A^{¡}_{\bullet}$ y grado en $\overline{A}^{\otimes \bullet}$ entonces

$$gr(d_K) = 0 = \mathrm{Id}_A \otimes 0; \;\; gr(b') = \mathrm{Id}_A \otimes b'$$

es un q-iso, luego su cono es acíclico. $\therefore$ el cono original es filtrado con graduado asociado exacto, luego exacto. En consecuencia el morfismo original era un q-iso. $\square$

Construcción cobar

Dualmente, si C es coálgebra co-aumentada, i.e. está dado $k \to C$ morfismo de coálgebras, es decir, C tiene un elemento e tal que $\Delta e = e \otimes e$. Fijamos una coálgebra coaumentada y su coaumentación. Recordamos que el axioma de counidad dice

$$(\epsilon \otimes \mathrm{Id})\Delta(c) = 1 \otimes c$$

luego $\epsilon(e) = 1$. Descomponemos C como suma directa de espacios vectoriales

$$C \;\; = \;\; \overline{C} \;\; \oplus \;\; ke$$

$$c \mapsto (c - \epsilon(c)e) + \epsilon(c)e$$

donde $\overline{C} = \mathrm{Ker}\epsilon$. Se define

$$\Omega(C) := T\overline{C}$$

el **álgebra** tensorial en $\overline{C}$, es una k-álgebra graduada con $\deg \overline{C} = 1$.

Recordar que (C, Δ_C) es una coálgebra. Se define $d_\Delta : \overline{C} \to \overline{C} \otimes \overline{C}$ de la siguiente forma: si

$$\Delta c = \sum_i c_i' \otimes c_i'' \qquad \in C \otimes C$$

entonces se define

$$d_\Delta c = \sum_i (c_i' - \epsilon(c_i')e) \otimes (c_i'' - \epsilon(c_i'')e \qquad \in \overline{C} \otimes \overline{C}$$

Ejercicio: $d_\Delta c = \Delta c - (e \otimes c + c \otimes e)$.

Se define un diferencial de grado $+1$ como la única super-derivación

$$\begin{tikzcd}
\overline{C} \arrow[r, "d_\Delta"] \arrow[d] & \overline{C}^{\otimes 2} \subset T\overline{C} \\
T\overline{C} \arrow[ur, dashed, "d"] &
\end{tikzcd}$$

$$d(\omega \otimes \eta) = d(\omega) \otimes \eta + (-1)^{deg \omega} \omega \otimes d(\eta)$$

$$\boxed{\Omega(C) := (T\overline{C}, d_\Delta)}$$

Finalizamos recolectando, sin demostración, algunas propiedades análogas a la construcción cobar

Proposición 10.19. *1.* $d_\Delta^2 = 0 \iff \Delta$ *es coasociativa.*

2. si $A = TV/(R)$ *y* $C = R_\bullet = A^{¡} \subseteq T^c V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$.

C es coaumentada con $e = 1$,

$$\overline{C} = V \oplus R \oplus \cdots \twoheadrightarrow V \ \rightsquigarrow \ T\overline{C} \twoheadrightarrow TV$$

se tiene $\Omega(A^{¡}) \to A$ *via la composición*

$$\begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[r, equal] \arrow[rrrr, bend left] & T\overline{C} \arrow[r, two heads] & TV \arrow[r, two heads] & TV/(R) \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

3. *A es Koszul* $\iff (\Omega(A^{¡}), d) \to (A_\bullet, 0)$ *es un q-iso.*

11. Categorías derivadas y trianguladas

11.1. Categorías derivadas y categoría de homotopía

Denotamos como siempre Chain(A)= la categoría de complejos de A-módulos, comenzaremos definiendo a categoría derivada a partir de ua propiedd universal:

Definición 11.1. Definición: A anillo, $D(A)$ es la categoría que satisface

- hay un funtor canónico $Q : \text{Chain}(A) \to D(A)$ que verifica $Q(f)$ es un isomorfismo para todo q-iso f.
- Si $F : \text{Chain}(A) \to \mathcal{C}$ es un funtor tal que $F(f)$ es un iso para todo q-iso f, entonces existe una única factorización

$$\begin{tikzcd} \text{Chain}(A) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{C} \\ D(A) \arrow[ur, "\exists! \widehat{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Claramente si existe una tal $D(A)$, es única a menos de isomorfismo (unico) de categorías.

Ejemplo 11.2.

$$H_\bullet : \text{Chain}(A) \to \prod_{n\in\mathbb{Z}} A - Mod$$
$$M \mapsto \{H_n(M)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

está definido en $D(A)$

Si A es s.s. $\Rightarrow H_\bullet(M)$ es q-iso a M, luego $H_\bullet : D(A) \cong \prod_{n\in\mathbb{Z}} A - Mod$ pero en general $D(A)$ no es una categoría abeliana, sino sólamente aditiva. Mencionamos sin demostración el siguiente:

Hecho: $D(A) \iff A$ es ss.

Factorización por homotopía y el Mapping cylinder

Mostraremos que un funtor $Q : \text{Chain}(A) \to D(A)$ necesariamente se factoriza por la categoría de homotopía:

Lema 11.3. *Sea* $Q : \text{Chain}(A) \to D(A)$ *el funtor canónico, si* $f \sim_h g \Rightarrow Q(f) = Q(g)$.

Para esto veremos el cilindro de una flecha. Si $f : X \to Y$ se define

$$cyl(f) = X \oplus X[-1] \oplus Y$$

con diferencial

$$d(x, x', y) = (dx + x', -dx', dy - fx')$$

y para un objeto, se define $cyl(X) = cyl(\text{Id}_X)$.

Notemos que tanto $i_1 : X \to cyl(X)$, $x \mapsto (x, 0, 0)$ como $i_2 : X \to cyl(X)$, $x \mapsto (0, 0, x)$ son morfismos de complejos. Por otra parte, ninguna de las proyecciones $(x, x', x'') \mapsto x$ ni $(x, x', x'') \mapsto x''$ conmuta con el diferencial. Sin embargo

$$p : cyl(X) \to X$$

$$(x, x', x'') \mapsto x + x''$$

si es un morfismo de complejos. Además, claramente

$$p \circ i_1 = \mathrm{Id}_X = p \circ i_2$$

Veamos que tanto $i_1 \circ p$ como $i_2 \circ p$ son homotópicas a la identidad de $cyl(X)$.

Demostración.

$$(i_1 \circ p)(x, x', x'') = i_1(x + x'') = (x + x'', 0, 0)$$

$$(i_1 \circ p - \mathrm{Id})(x, x', x'') = (x + x'', 0, 0) - (x, x', x'') = (x'', -x', -x'')$$

Definimos $h(x, x', x'') = (0, x'', 0)$, entonces

$$(dh + hd)(x, x', x'') = d(0, x'', 0) + h(dx + x', -dx', dx'' - x')$$

$$= (x'', -dx'', -x'') + (0, dx'' - x', 0) = (x'', -x', -x'')$$

Para $i_2 \circ p$ es análogo, lo dejamos como ejercicio. □

Si $\phi : cyl(X) \to Y$ es un morfismo de complejos, entonces $f, g : X \to Y$

$$f := \phi \circ i_1, \quad g := \phi \circ i_2$$

son dos morfismos de complejos, y podemos describir

$$\phi(x, x', x'') = \phi(x, 0, 0) + \phi(0, x', 0) + \phi(0, 0, x'')$$

$$= f(x) + \phi(0, x', 0) + g(x'')$$

Denotemos $h(x') = \phi(0, x', 0)$

Lema 11.4. *ϕ es morfismo de complejos $\iff$ $f \sim_h g$.*

Demostración.

$$\phi d(x, x', x'') = d\phi(x, x', x'') \iff$$

$$\iff \phi(dx + x', -dx', dx'' - x') = d(f(x) + h(x') + g(x''))$$

$$\iff f(dx) + f(x') - hd(x') + gd(x'') - g(x') = df(x) + dh(x') + dg(x'')$$

y como f y g son morfismos de complejos, $fd = df$, $gd = dg$, luego lo anterior equivale a

$$\iff f(x') - hd(x') - g(x') = dh(x')$$

$$\iff f - g = hd + dh$$

□

Ahora tenemos si $f \sim g : X \to Y$, consideramos $Q(f), Q(g) : Q(X) \to Q(Y)$. Fabricamos $\phi : cyl(X) \to Y$

$$\phi(x, x', x'') = f(x) + h(x') + g(x'')$$

$$f = \phi \circ i_1, \quad g = \phi \circ i_2$$

Notamos que i_1 e i_2 son equivalencias homotópicas, ambas con **la misma** inversa homotópica p, luego en $D(A)$ valen las igualdades

$$\begin{aligned} Q(i_1) &= Q(i_2)Q(i_2)^{-1}Q(i_1)^{-1} \\ &= Q(i_2)Q(p)^{-1}Q(i_1)^{-1} \\ &= Q(i_2)Q(i_1)^{-1}Q(i_1)^{-1} = Q(i_2) \\ \Rightarrow\ Q(f) &= Q(\phi \circ i_1) = Q(\phi)Q(i_1) \\ &= Q(\phi)Q(i_2) = Q(\phi \circ i_2) = Q(g) \end{aligned}$$

$$\therefore\ \begin{tikzcd} \mathrm{Chain}(A) \arrow[rr, "Q"] \arrow[dr, "\pi"'] & & D(A) \\ & \mathcal{H}(A) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

11.2. Estructura triangulada

La categoría triangulada, al igual que la de homotopía, deja de ser abeliana en general, pero hay ciertas operaciones con los complejos que se mantienen. Comenzamos por la traslación o suspensión:

El funtor de Traslación está bien definido en $D(A)$:

$$M \mapsto M[1]$$

claramente preserva q-iso, luego, existe la factorización del diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Chain}(A) \arrow[rrrr, bend left, "Q\circ[1]"] \arrow[ddr, "Q"] & M \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & M[1] \arrow[r, mapsto] & Q(M[1]) & D(A) \\ & & Q(M) \arrow[ur, dashed, mapsto] & & \\ & D(A) \arrow[uurrr, dashed, "{[1]}"'] & & & \end{tikzcd}$$

Mapping cone

Llamaremos **triángulo** en $\mathcal{H}(A)$ a una terna

$$(X, Y, Z, u : X \to Y, v : Y \to Z, w : Z \to X[-1])$$

que sea isomorfa a un cono: a toda terna t.q.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal, "a"', "\cong"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal, "b"', "\cong"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal, "c"', "\cong"] & X[-1] \arrow[d, equal, "{a[-1]}"', "\cong"] \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & Co(f) \arrow[r] & M[-1]
\end{tikzcd}$$

los cuadrados conmutan a menos de homotopía y a, b, c son equivalencias homotópicas.

Recordamos $Co(f) = N \oplus M[-1]$ con diferencial

$$\partial(n, m) = (dn + f(m), -dm)$$

$M \xrightarrow{f} N \to Co(f) \to M[-1]$ lo llamaremos *distinguido*. Los **triángulos en** $D(A)$ se definen como la menor clase de uplas cerrada por isomorfismo que contienen a los triángulos distinguidos.

Observación 11.5. En la factorización $\widetilde{Q} : \mathrm{Chain}(A) \to D(A)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Chain}(A) \arrow[rr, "Q"] \arrow[dr, "\pi"'] & & D(A) \\
& \mathcal{H}(A) \arrow[ur, "\widetilde{Q}"'] &
\end{tikzcd}$$

el funtor $\mathcal{H}(A) \to D(A)$ manda triángulos en triángulos.

11.3. Propiedades de los triángulos

Recolectamos propiedades de los triángulos en $\mathcal{H}(A)$ que darán lugar luego a la axiomatización de catgegoría triangulada.

T1: $X \xrightarrow{\mathrm{Id}} X \to 0 \to X[-1]$ es un triángulo en $\mathcal{H}(A)$ y $D(A)$

Demostración. Notamos que $Co(\mathrm{Id})$ siempre es contráctil. □

T2: Si $(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1])$ es un triángulo, sus trasladados

$$(Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1] \xrightarrow{-u} Y[-1])$$

y

$$(Z[1] \xrightarrow{-w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z)$$

también lo son.

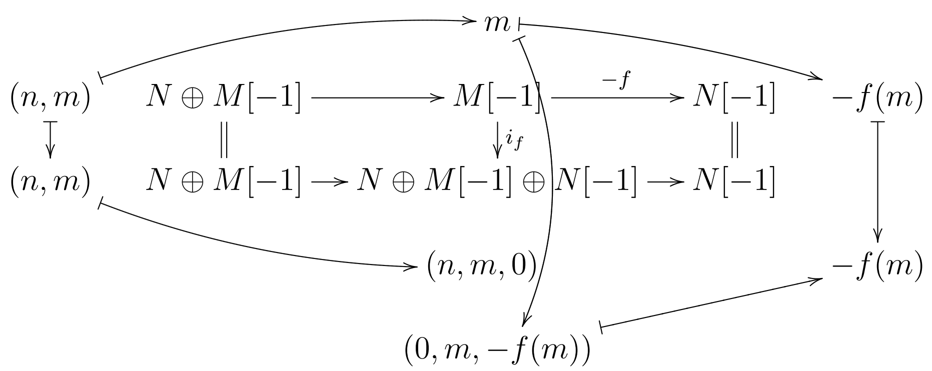
Demostración. Suponemos $(X \to Y \to Z \to X[-1]) = (M \xrightarrow{f} N \to Co(f) \to M[-1])$, consideramos

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] \arrow[d, equal] & Co(f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & M[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & N[-1] \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "i"] & N \oplus M[-1] \arrow[r] & M[-1] \arrow[r, "-f"] & N[-1]
\end{tikzcd}$$

$$Co(i) = Co(f) \oplus N[-1] = N \oplus M[-1] \oplus N[-1]$$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & Co(f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & M[-1] \arrow[r, "-f"] \arrow[d, equal] & N[-1] \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & N \oplus M[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & M[-1] \arrow[r, "-f"] \arrow[d, "i_f"] & N[-1] \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "i"] & Co(f) \arrow[r] & Co(i) \arrow[r] & N[-1]
\end{tikzcd}$$

Para que el cuadrado de la derecha conmute, definimos $i_f(m) = (0, m, -f(m))$ y vemos que el cuadrado del medio no conmuta...



sin embargo, si $\phi, \psi : Co(f) \to Co(i)$ están definidas por

$$\phi(n,m) = (n,m,0)$$

$$\psi(n,m) = (0,m,-f(m))$$

$\phi \sim_h \psi$ via $h(n,m) = (0,0,n)$:

$$\begin{aligned}
(hd + dh)(n,m) &= h(dn + f(m), -dm) + d(0,0,n) \\
&= (0,0,dn + f(m)) + (n, 0, -dn) \\
&= (n, 0, f(m)) = (n,m,0) - (0,m,-f(m)) \\
&\therefore hd + dh = \phi - \psi
\end{aligned}$$

y el diagrama conmuta en $\mathcal{H}(A)$

A su vez, $i_f : M[-1] \to Co(i) = N \oplus M[-1] \oplus N[-1]$ no es un isomorfismo de complejos... sin embargo, si definimos $p : M : Co(i) \to M[-1]$ como la proyección en la coordenada $M[-1]$, claramente $p_M \circ i_f = \mathrm{Id}_{M[-1]}$. La otra composición da

$$i_f(p_M(n,m,n')) = i_f(m) = (0, m, -f(m))$$

y se tiene $i_f \circ p \sim \mathrm{Id}_{Co(i)}$ via

$$h(n,m,n') = (0,0,n):$$

$$\begin{aligned}(hd+dh)(n,m,n') &= h(dn + f(m) + n', -dm, -dn') + \partial(0,0,n)\\ &= (0,0,dn+f(m)+n') + (n,0,-dn) = (n,0,f(m)+n')\\ &= (n,m,n') - (0,m,-f(m))\end{aligned}$$

Es decir, $i_f \circ p_M \sim \mathrm{Id}_{Co(i)}$.

La demostración de la traslación para el otro sentido la dejamos como ejercicio. $\square$

T3: Sea $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[d, "b"] \\ X' \arrow[r, "g"] & Y' \end{tikzcd}$ un diag. conmut. en Chain(A),

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Co(f) \arrow[r] \arrow[d, "b\oplus a"] & X[-1] \arrow[d, "a"] \\ X' \arrow[r, "g"] & Y' \arrow[r] & Co(g) \arrow[r] & X'[-1] \end{tikzcd}$$

es un morfismo de triángulos

Demostración. es claro que el diagrama conmuta, para ver que es morfismo de complejos:

$$(b\oplus a)d(y,x) = (b\oplus a)(dy + fx, -dx) = (bdy + bfx, -adx) =$$

$$d(b\oplus a)(y,x) = d(by, ax) = (dby + gax, -dax)$$

sabemos $ad = da$, $db = bd$, y como el cuadrado riginal conmutaba, $bf = ga$. $\square$

11.4. Categorías trianguladas

Definición:(Verdier) Una categoría aditiva $\mathcal{T}$ se dice triangulada si tiene un autofuntor $M \mapsto M[1]$ y una clase distinguida de ternas $\{(X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1])\}$ satisfaciendo:

[T1] $\forall u : X \to Y$ existe un triángulo que empieza con u: $(X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1])$. La terna $(X \overset{\mathrm{Id}}{\to} X \overset{0}{\to} 0 \overset{0}{\to} X[-1])$ es un triángulo, y la clase de triángulos es cerrada por isomorfismos de triángulos, i.e.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a", "\cong"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b", "\cong"'] & W \arrow[r, "u"] \arrow[d, "c", "\cong"'] & X[-1] \arrow[d, "a[-1]", "\cong"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & W' \arrow[r, "u"] & X'[-1] \end{tikzcd}$$

si la fila de arriba es un triángulo $\Rightarrow$ la de abajo también.

[T2] (rotación) si $(X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1])$ es un triángulo, sus "rotados"

$$(Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1] \overset{-u}{\longrightarrow} Y[-1]),$$

$$(Z[1] \overset{-w}{\longrightarrow} X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z)$$

también lo son.

[T3](extensión de morfismos) Si se tienen dos triángulos como las filas, y el cuadrado de la izq. conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & W \arrow[r, "u"] \arrow[d, dotted, "\exists c"'] & X[-1] \arrow[d, "a[-1]"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & W' \arrow[r, "u"] & X'[-1]
\end{tikzcd}$$

entonces se puede extender a un morfismo de triángulos

[T4] El axioma del octahedro:

(No se conoce ejemplo de categoría aditiva que satisfaga T1 T2 T3 y no T4.) Consideremos dos flechas componibles:

$$X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z$$

y los completamos a triángulos

$$X \overset{f}{\to} Y \overset{i}{\to} Z' \overset{i'}{\to} X[-1]$$

$$Y \overset{g}{\to} Z \overset{j}{\to} X' \overset{j'}{\to} Y[-1]$$

$$X \overset{gf}{\longrightarrow} Z \overset{k}{\to} Y' \overset{k'}{\to} X[-1]$$

los acomodamos en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "gf"] & & & \\
Y \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "i"] & & Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"] & X' \arrow[r, "j'"] & Y[-1] \\
Z' \arrow[d, "i'"] & & Y' \arrow[d, "k'"] & & \\
X[-1] & & X[-1] & &
\end{tikzcd}$$

Entonces existen $u : Z' \to Y'$ y $v : Y' \to X'$ tales que el siguiente diagrama conmuta y la tercer fila es un triángulo:

$$\begin{tikzcd}
 & Y'[1] \arrow[r, "{k'[1]}"] \arrow[dl, "{v[1]}"'] & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "gf"] & & & \\
X'[1] \arrow[r, "{j'[1]}"] & Y \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "i"] & & Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"] & X' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, equal] & Y[-1] \arrow[d, "{i[-1]}"] \\
 & Z' \arrow[rr, "\exists u"] \arrow[dr, "i'"'] & & Y' \arrow[r, "\exists v"] \arrow[dl, "k'"] & X' \arrow[r, "{j'i[-1]}"] & Z'[-1] \\
 & & X[-1] & & &
\end{tikzcd}$$

O sea, este axioma relaciona $Co(f)$, $Co(f)$ y $Co(gf)$.

el siguiente diagrama conmuta y la tercer fila es un triángulo:

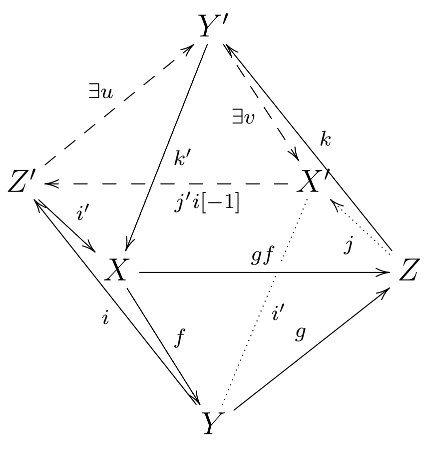
$$\begin{tikzcd}
 & Co(gf)[1] \arrow[r, "{k'[1]}"] \arrow[dl, "{v[1]}"'] & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "gf"] & & & \\
Co(g)[1] \arrow[r, "{j'[1]}"] & Y \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "i"] & & Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"] & Co(g) \arrow[r, "j'"] \arrow[d, equal] & Y[-1] \arrow[d, "{i[-1]}"] \\
 & Co(f) \arrow[rr, "\exists u"] \arrow[dr, "i'"'] & & Co(gf) \arrow[r, "\exists v"] \arrow[dl, "k'"] & Co(g) \arrow[r, "{j'i[-1]}"] & Co(f)[-1] \\
 & & X[-1] & & &
\end{tikzcd}$$

O sea, este axioma relaciona $Co(f)$, $Co(f)$ y $Co(gf)$.

Si pensamos $Co(f) = Y/X$, $Co(gf) = Z/X$, $Co(g) = Y/Z$ entonces tendriamos $Y/Z = \dfrac{Y/X}{Z/X}$

La manera "octahedral"

Al octahedro se le completa el triángulo de atrás. Todas las caras de este octahedro son o bien triángulos o bien diagramas conmutativos:



$$iu = gk, \quad uk' = i', \quad kv = j, \quad k'f[-1] = vj'$$

11.5. Propiedades homológicas de categorías (pre)trianguladas

Fijamos $\mathcal{T}$ una categoría aditiva con funtor de suspensión [1] y una colección de "triángulos" $\{(X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1])\}$

que satisface T1 T2 T3, y no nos preocuparemos por T4. (Una tal categoría se la denomina pre-triangulada.)

Hecho 1: en un triángulo, la composión de 2 seguidos es cero.

Demostración. tomemos $(X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1])$ un triángulo y consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X[-1] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1]
\end{tikzcd}$$

□

Hecho 2: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,-)$ manda triángulos en s.e.largas:
si $(X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1])$ es triángulo y $W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{T}) \Rightarrow$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,X[-1])$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

Denotemos $H_n^W(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X[n])$, queremos ver que tenemos una s.e. larga

$$\cdots \to H_n^W(X) \to H_n^W(Y) \to H_n^W(Z) \to H_{n-1}^W(X) \to \cdots$$

(por traslación, basta ver que es exacto en un solo lugar!)

Demostración. Sabemos que la composición de dos seguidos es cero, luego $v_* u_* = (vu)_* = 0_* = 0$. Supogamos ahora

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Z)$$

$$f \mapsto v \circ f = 0$$

Entonces podemos hacer el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[-1] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1]
\end{tikzcd}$$

o bien, trasladando para atrás,

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[-1] \arrow[r] & W[1] \\
Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1] \arrow[r, "-u[-1]"] & Y[-1]
\end{tikzcd}$$

Por T3 $\exists c$ que completa a un morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[-1] \arrow[r] \arrow[d, dashed, "c"] & W[1] \arrow[d, "f[-1]"] \\ Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1] \arrow[r, "-u[-1]"] & Y[-1] \end{tikzcd}$$

y ahora volvemos a trasladar

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "c[1]"] & W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[-1] \arrow[d, "c"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1] \end{tikzcd}$$

Si llamamos $g := c[1]$, tenemos

$$f = u \circ g = u_*(f)$$

es decir, $\mathrm{Ker}(v_*) \subseteq Im(u_*)$. □

Hecho 2*: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, W)$ manda triángulos en s.e.largas:
si $(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1])$ en un triángulo y $W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{T})$, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[\text{-}1], W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, W)$$

es una suc. exacta de grupos abelianos

Demostración. Ejercicio! □

Hecho 3: (Lema de los 5) Si en un morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "c"'] & X[-1] \arrow[d, "a[-1]"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[-1] \end{tikzcd}$$

de a, b, c, dos de ellos son isos, entonces el tercero es iso.

Demostración. sup. a y b son isos y $W \in \mathrm{Obj}\mathcal{T} \Rightarrow$ morfismo de s.ex.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X) \arrow[r] \arrow[d, "a_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y) \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z) \arrow[r] \arrow[d, "c_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X[\text{-}1]) \arrow[d, "a[\text{-}1]_*"'] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X'[\text{-}1]) \end{tikzcd}$$

y por el lema de los 5 tradicional c_* es iso $\forall W \Rightarrow c$ es iso. □

Corolario 11.6. *$u : X \to Y$ determina al triángulo $(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1])$ a menos de isomorfismo (no único) de triángulos.*

Hecho 4: $u : X \to Y$ es un iso si y sólo si $\forall$ triángulo de la forma $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1]$, necesariamente $Z = 0$.

Demostración. Basta ver que $X \xrightarrow{u} Y \to 0 \to X[-1]$ es un triángulo si y sólo si u es un iso. Supongamos que u es un iso, entonces se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X[-1] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[-1] \end{tikzcd}$$

como el de arriba es triángulo el de abajo también.

Recíprocamente, asumiendo que $X \xrightarrow{u} Y \to 0 \to X[-1]$ es un triángulo, del cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y[-1] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[-1] \end{tikzcd}$$

extendemos a un morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, dashed] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y[-1] \arrow[d, dashed] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[-1] \end{tikzcd}$$

y así obtenemos una flecha $a : Y \to X$ tal que $u \circ a = \mathrm{Id}_Y$. Por el lema de los 5, a es iso, luego $u = a^{-1}$ y u un iso. $\square$

"Corolario": Si en una categoría triangulada se quiere localizar una clase de flechas (e.g. $\mathcal{T} = \mathcal{H}(A)$ y la clase de flechas = los qisos), entonces

" localizar por los q-iso" $\equiv$ "cocientar por los acíclicos"

(que son los conos de los quasi-isos.)

11.6. Objetos cerrados

Comenzamos con un ejemplo:

Ejemplo 11.7. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M) = H_0(M)$

Demostración. $f : A \to M$ está univocamente determinado por

$$f(1) =: m \in M_0$$

Además, $d(1) = 0$ y $fd = df \Rightarrow m \in \mathrm{Ker} d_M$.

Si $f \sim g$, $f(1) = m$, $g(1) = m'$, $\exists h$ tal que

$$f - g = dh + hd$$

$$\Rightarrow m - m' = dh(1) + hd(1) = d(h(1)) \Rightarrow [m] = [m'] \in H_0(M)$$

Recíprocamente, si $m, m' \in M$, $f(a) = am$, $g(a) = am'$, si $m - m' = dx$, se define $h : A \to M$

$$h(a) = ax$$

y resulta $f \sim_h g$.

$\square$

Observación 11.8. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M) = H_0(M)$ y Si $f : M \to M'$ es un q-iso $\Rightarrow$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M')$$

es un iso, también si $g : M'' \to M$ es un q-iso $\Rightarrow$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M'') \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M)$$

es iso. Esto nos da una indicación de que el funtor natural $\mathcal{H}(A) \to D(A)$ debería inducir un iso

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{D(A)}(A, M)$$

Para demostrar con rigor esta afirmación necesitamos una construcción de la categoría $D(A)$, que es lo que haremos ahora.

11.7. La condición de Ore y la localización categórica en $\mathcal{H}(A)$

La condición de Ore es utilizada para construir localización en anillos conmutativos, en el caso particular en que toda fraccion a izquierda equivle a una fracción a derecha. Esquemáticamente

$$''\boxed{g\ t^{-1} = s^{-1} f}''$$

Cuando esto es posible, la localización no conmutativa se describe formalmente de forma muy similar a la localización conmutativa usual. Para la localización categórica, en a categoría de complejos esta equivalencia de fracciones a izquierda y fracciones a derecha (donde el denominador es un quasi-isomorfismo) es válida en el siguiente sentido:

Lema 11.9. *si $t : X \to Y$ es q-iso y $g : X \to Z$ es morfismo $\Rightarrow$ se puede completar con f y s un q-iso:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, dotted, "f"] \\ Z \arrow[r, dotted, "s"] & W \end{tikzcd}$$

Demostración.

$$\begin{tikzcd} C[1] \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & C \arrow[d, equal] \\ C[1] \arrow[r, "g\circ p"] & Z \arrow[r, "s"] & W \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

t q-iso $\Rightarrow C$ acíclico, $\Rightarrow s$ es q-iso por s.e. larga $\square$

Análogamente, si el dato original no es t, g sino s, f, la igualdad de fracciones sería la misma pero leida en distinto orden temporal:

$$''\boxed{g\ t^{-1} = s^{-1}f}'' \leftrightarrow'' \boxed{s^{-1}f = g\ t^{-1}}''$$

y el lema correspondiente es:

Lema 11.10. *Si $s : Z \to W$ es q-iso y $f : Y \to W$, entonces se puede completar con g y t un q-iso:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted, "t"] \arrow[d, dotted, "g"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "s"] & W \end{tikzcd}$$

Demostración.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted, "t"] \arrow[d, dotted, "g"] & Y \arrow[r, "i\circ f"] \arrow[d, "f"] & Co(s) \arrow[r, dotted] \arrow[d, equal] & X[-1] \arrow[d, dotted] \\ Z \arrow[r, "s"] & W \arrow[r, "i"] & Co(s) \arrow[r] & Z[-1] \end{tikzcd}$$

s q-iso $\Rightarrow Co(s)$ acíclico, $\Rightarrow t$ es q-iso por s.e. larga

□

Corolario 11.11. *Se pueden componer fracciones a izq. (o a der.):*

$$(t_1^{-1}g_1)(t_2^{-1}g_2) = t_1^{-1}(g_1 t_2^{-1})g_2 = t_1^{-1}(s^{-1}f)g_2 = (st_1)^{-1}(fg_2)$$

(suponiendo que todo este bien definido.) Para esto defnimos la siguiente relació de equivalencia

Definición 11.12. Denotando "$t^{-1}f$" a la clase de equivalencia del par de flechas "no componibles"

$$X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{t} Z$$

con la relación

$$X \xrightarrow{f_1} Y_1 \xleftarrow{t_1} Z \quad \sim \quad X \xrightarrow{f_2} Y_2 \xleftarrow{t_2} Z$$

$\iff \exists$ un diagrama conmutativo (con t q-iso)

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[dr, "t_1"] & \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & X_3 \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "t"] & Y \\ & Y_2 \arrow[ur, "t_2"'] & \end{tikzcd}$$

Notamos que también **se puede definir la suma** de fracciones:

$$\begin{tikzcd} & X_1 & \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N, \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "s"] \\ & X_2 & \end{tikzcd} \quad t^{-1}f + s^{-1}g = ?$$

Usamos los lemas precvios para completar a un diagrama como sigue:

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[d, dotted, "s'"] & \\
M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & X_3 & N \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "s"] \arrow[l, dotted, "s't=t's"'] \\
 & X_2 \arrow[u, dotted, "t'"'] &
\end{tikzcd}$$

y definimos

$$t^{-1}f + s^{-1}g = t^{-1}(s')^{-1}s'f + (s)^{-1}(t')^{-1}t'g = (s't)^{-1}(s'f + t'g)$$

11.8. Construcción "concreta" de $D(A)$ a partir de $\mathcal{H}(A)$

Ejemplo 11.13. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M) = H_0(M)$

Demostración. $f : A \to M$ está univocamente determinado por

$$f(1) =: m \in M_0$$

$d(1) = 0 \Rightarrow dm = 0$,
si $f \sim g$, $f(1) = m$, $g(1) = m'$

$$m - m' = dm'' \qquad \leftrightarrow \qquad h(1) = m'', \quad f - g = dh + hd$$

□

Ejemplo 11.14. $\mathrm{Hom}_{D(A)}(A, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M)$

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(A, M) = \Big\{ \big(A \overset{[f]}{\to} M' \overset{[t]}{\leftarrow} M \big) : \underset{(y\ t\ qiso)}{[f] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M)} \Big\}$$

$$\cong \Big\{ \big([m'], M' \overset{[t]}{\leftarrow} M \big) : [m'] \in H_0(M') \underset{\leftarrow}{\overset{t_*}{\cong}} H_0(M) \Big\}$$

$$\Big(([m'], t) \mapsto \underbrace{t_*^{-1}([m'])}_{\in H_0(M)} \Big) \ \cong\ H_0(M)$$

$\therefore$ el funtor natural $\mathcal{H}(A) \to D(A)$ induce un iso

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(A, M) \quad \cong \quad H_0(M) \quad \cong \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M)$$

$$t^{-1}f = \big(A \overset{f}{\to} M' \overset{t}{\leftarrow} M \big) \mapsto (t_*)^{-1}([f(1)]) = [m] \mapsto [\phi_m] : (1 \mapsto m)$$

Definición: decimos que P es **cerrado** si $\forall M \in \mathrm{Chain}(A)$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P, M) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{D(A)}(P, M)$$

Ejemplo 11.15. $P = A$ es cerrado.

Ejemplo 11.16. k cuerpo, A k-álgebra, $V \in \mathrm{Chain}(k) \Rightarrow P = A \otimes V$ es cerrado:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(k)}(V, M)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(V, M)$$
$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_{D(k)}(V, M)$$

Pero $\mathcal{H}(k) = D(k)$ porque q-iso k-lineal = equiv. homotópica.

Lema 11.17. *1. Ser cerrado es estable por suspensión:*

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(P[1], M) \cong \mathrm{Hom}_{D(A)}(P, M[-1])$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P, M[-1]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P[1], M)$$

2. $P \xrightarrow{u} P' \xrightarrow{v} P'' \xrightarrow{w} P[-1]$ *un triángulo, si dos son cerrados, el tercero también.*

3. $\{P_i\}_{i \in I}$ *cerrados* $\Rightarrow \bigoplus_{i \in I} P_i$ *cerrados.*

Teorema 11.18. *k cuerpo, A k-álgebra* $\Rightarrow \forall M \in \mathrm{Chain}(A)$

$$P(M) := \big(\bigoplus_{n \geq 1} A^{\otimes n} \otimes M, b' + d_M\big)$$

es cerrado

Lema 11.19. *Si* $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *es una s.e.c. en* $\mathrm{Chain}(A)$ *que se parte como A-mod* $\Rightarrow \exists f : Z[-1] \to X$ *y un iso uplas*

$$\begin{tikzcd}
Z[1] \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & Z \arrow[d, equal] \\
Z[1] \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \oplus_f Z \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[d, equal] \\
Z[1] \arrow[r, "f"] & X \arrow[r] & Co(f) \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_n \arrow[r, "i"] & Y_n \arrow[r, "\pi"'] & Z_n \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow Y \quad \cong \quad i(X_n) \oplus s(Z_n) \quad \cong \quad X_n \oplus Z_n$$

$$y \mapsto (y\text{-}s(\pi(y)), s(\pi(y)) \mapsto i^{-1}(y\text{-}s(\pi(y)) \oplus \pi(y)$$

como X_n es subcomplejo, $d(x, 0) = (dx, 0)$, como π es morfismo, $d(0, z) = (?, dz)$
$\therefore$ se define $f : Z[1] \to X$ como

$$d(0, z) = (f(z), dz)$$

(notar que f baja el grado, como d), o bien,

$$f(z) = i^{-1}\Big(d(s(z)) - s(d(z))\Big)$$

$$(0,0) = d^2(0,z) = d(f(z), d(z)) = (df(z) + f(dz), d^2 z)$$

entonces f no es morfismo de complejos $Z \to X$, porque baja el grado y anticonmuta con el d original, pero sí es un morfismo de complejos $Z[1] \to X$.

Notar que hay un isomorfismo en Chain(A), por lo tanto el original es parte de un triángulo tanto en $D(A)$ como en $\mathcal{H}(A)$.

$\square$

Lema 11.20. *(B. Keller) Si en un complejo P se tiene una filtración que satisface*

1) $P = \bigcup_{p\geq 0} F_p$ ($F_{-1} = 0$),

2) $0 \to F_p \to F_{p+1} \to F_{p+1}/F_p$ se parte como A-módulo, y

3) F_{p+1}/F_p cerrado $\forall p$,

entonces P es cerrado.

Ejemplo 11.21. $P(M) = \bigoplus_{p\geq 1} A^{\otimes p} \otimes M$ es cerrado (y $\rho : P(M) \to M$ es q-iso) con

$$F_p = \bigoplus_{n=1}^{p} A^{\otimes n} \otimes M,$$

pues $F_p/F_{p-1} = A^{\otimes p} \otimes M$ es A-libre

Observación 11.22. si vale 1) 2) $\Rightarrow P \cong \bigoplus\limits_{n\geq 0} F_n/F_{n-1}$ como A-módulo,

pero no nec. como complejo.

Demostración. 1ero) inductivamente F_n es cerrado para todo n.

Afirmación: La sgte es una s.e.c. en Chain(A) que se parte como A-módulo, luego, un triangulo en $\mathcal{H}(A)$:

$$0 \to \bigoplus_n F_n \overset{\Phi}{\to} \bigoplus_n F_n \overset{can}{\to} P \to 0$$

donde, $\Phi|_{F_n} : F_n \to F_n \oplus F_{n+1}$

$$m_n \mapsto m_n - i(m)_{n-1}$$

O sea

$$\Phi(m_0, m_1, m_2, m_3, \cdots) = (m_0, m_1 - m_0, m_2 - m_1, m_3 - m_2, \cdots)$$

y $can : \bigoplus_n F_n \to P$ es

$$can(m_0, m_1, m_2, m_3, \cdots) = \sum_{n\geq 0} m_n$$

Exactitud: claramente can es epi. Φ es inyectiva pues si

$$0 = \Phi(m_0, m_1, m_2, m_3, \cdots, m_p, 0, 0, \cdots)$$

$$= (m_0, m_1 - m_0, m_2 - m_1, m_3 - m_2, \cdots, m_p - m_{p-1}, -m_p, 0, 0, \cdots)$$
$$\Rightarrow m_0 = 0 \Rightarrow m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = 0 \Rightarrow \cdots \quad \Rightarrow \quad m_n = 0 \forall n$$

exactitud al medio: supongamos $\underline{m} \in \operatorname{Ker}(can)$:

$$can(\underline{m}) = can(m_0, m_1, m_2, m_3, \cdots) = \sum_{n \geq 0} m_n = 0$$

Sobre los elementos de $\operatorname{Ker}(can)$ podemos definir

$$p(\underline{m}) = (m_0, m_1 + m_0, m_2 + m_1 + m_0, \cdots, \overbrace{\sum_{i=0}^{p} m_i}^{lugar\ p}, \cdots) \in \bigoplus_n F_n$$

y claramente vale $\Phi(p(\underline{m})) = \underline{m}$. □

Hecho: M es cerrado $\iff \rho : P(M) \to M$ es una equivalencia homotópica.

Este hecho no es trivial, pero es cierto, y nos dará la siguiente caracterización:

Teorema 11.23. *$M \mapsto P(M)$ da una equivalencia de categorías trianguladas $D(A) \to \mathcal{H}_{cerr}(A)$*

Notar que en una dirección

$$D(A) \to \mathcal{H}_{cerr}(A) \to D(A)$$
$$M \mapsto P(M) \mapsto P(M)$$

y para todo M, $\rho : P(M) \to M$ es q-iso. En la otra dirección,

$$\mathcal{H}_{cerr}(A) \to D(A) \to \mathcal{H}_{cerr}(A)$$
$$C \mapsto C \mapsto P(C)$$

y como C es cerrado, $P(C) \to C$ es equiv. homotópica (por el hecho anteriormente mencionado).

Para mostrar este resultado, comenzamos con la siguiente definición:

Definición 11.24. M se dice fuertemente cerrado (f. cerrado) si $P(M) \to M$ es una equivalencia homotópica.

Observación 11.25. $P(M)$ siempre es cerrado, y si $P(M) \to M$ es una equiv homotópica entonces

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(M, -) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P(M), -)$$
$$\cong \operatorname{Hom}_{D(A)}(P(M), -) \cong \operatorname{Hom}_{D(A)}(M), -)$$

el iso del primero es por ser equiv homotop. Del 1er al 2do: $P(M)$ es cerrado, y el ultimo iso, porque $P(M) \to M$ siempre es qiso. Concluimos que f. cerrado implica cerrado, y la denominación tiene sentido.

Nuestro objetivo es mostrar que cerrado implica f.cerrado. Es decir, que las dos nociones coinciden.

Observación 11.26. $P(-)$ conmuta con traslación, conos, y si $V \in \mathrm{Chain}(k) \Rightarrow P(M \otimes V) = P(M) \otimes V$, luego ser f-cerrado es estable por suspencion, 2 de 3 en triángulos de $\mathcal{H}(A)$, y $- \otimes V$.

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
P(M) \arrow[r, "P(f)"] \arrow[d, "\rho_M"] & P(N) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_N"] & P(Co(f)) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{Co}"] & P(M[-1]) \arrow[d, "\rho_M[-1]"] \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & Co(f) \arrow[r] & M[-1]
\end{tikzcd}$$

$P(M \otimes V) \cong P(M) \otimes V$ y $- \otimes V$ preserva equiv. homotópica.

□

Ejemplo 11.27. A es f.cerrado (con $h(\omega) = \omega \otimes 1$), también $A \otimes V$ para cualquier $V \in \mathrm{Chain}(k)$.

Usando el argumento de B. Keller tenemos el siguiente corolario:

Corolario 11.28.
- $P_{\leq}n(M)/P_{\leq n-1}(M) = A \otimes W_n$ *es f-cerrado para todo* n
- $P_{\leq}n(M)$ *es f-cerrado para todo* n
- $P(M)$ *es f-cerrado*

Cerrado implica f-cerrado

Sea M es cerrado y $\rho : P(M) \to M$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(P(M), P(M))) \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}_D(P(M), P(M)) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, P(M)) \arrow[r, equal] \arrow[u, "\rho_*"] & \mathrm{Hom}_D(M, P(M)) \arrow[u, "\rho_*", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

ρ_* es iso del lado D. Por ser M (y $P(M)$) cerrado se tienen los isos horizontales. Luego, ρ_* es iso del lado $\mathcal{H}$, en particular epi:

$$[\mathrm{Id}_{P(M)}] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(P(M), P(M)) \in Im(\rho_*)$$

y por lo tanto $\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, P(M))$ tal que $[\mathrm{Id}_{P(M)}] = \rho_*[g]$:

$$\mathrm{Id}_{P(M)} \sim_h \rho \circ g$$

Si ahora consideramos el digrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, M) \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}_D(M, M) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, P(M)) \arrow[r, equal] \arrow[u, "\rho^*"] & \mathrm{Hom}_D(M, P(M)) \arrow[u, "\rho^*", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

ρ^* es iso del lado D, y M (y $P(M)$) cerrado implica isos horizontales. Por lo tanto ρ^* es iso del lado $\mathcal{H}$. Concluimos

$$[\mathrm{Id}_M] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, M) \in Im(\rho^*)$$

y entonces $\exists [g'] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, P(M))$ t.q.

$$[\mathrm{Id}_M] = \rho^*([g']) = [g' \circ \rho]$$

Vemos entonces que ρ tiene inversa homotópica a izq. derecha g y a izquierda g', luego $g \sim g'$ y ρ es una equivalencia homotópica. $\square$

Observación 11.29. Si $F : A$-Mod$\to B$-Mod es un funtor aditivo, podemos extenderlo a un funtor entre complejos $\rightsquigarrow F : \mathrm{Chain}(A) \to \mathrm{Chain}(B)$

$$(M_\bullet, d) \mapsto (FM_\bullet, Fd)$$

y resulta un compejo pues F aditivo implica $F(d)^2 = F(d^) = F(0) = 0$.

su vez, como es aditivo, si $f \sim g$, $f - g = hd + dh$ para alguna h A-lineal, luego, popr ser F aditivo

$$F(f) - F(g) = F(f - g) = F(hd + dh) = F(hd) + F(dh) = F(h)F(d) + F(d)F(h)$$

Es decir, $F(h)$ es una homotopía entre $F(f)$ y $F(d)$, luego, F induce un funtor bien definido

$$F : \mathcal{H}(A) \to \mathcal{H}(B)$$

Notar que F aditivo también implica

$$F(Co(f : M \to N)) = Co(F(f) : FM \to FN)$$

Si F fuera *exacto*, entonces manda acíclicos en acíclicos y en consecuencia q-isos (con cono acíclico) en q-iso, luego, la propiedad universal de $D(A)$ dice que la composición $\mathrm{Chain}(A) \to \mathrm{Chain}(B) \to D(B)$ determina que F esta bien definido como funtor $D(A) \to D(B)$. Sin embargo, s F *no es exacto*, entoce plicar F término a término en un complejo *no está fien definido*

Sin embargo, la caracterización $D(A) \cong \mathcal{H}_{cerr}(A) \subset \mathcal{H}(A)$ permite daar una definición de funtor derivado vía

$$\begin{tikzcd} D(A) \arrow[r, "P", "\cong"'] \arrow[rrr, bend left, "DF"] & \mathcal{H}(A) \arrow[r, "F"] & \mathcal{H}(B) \arrow[r, "Q"] & D(B) \end{tikzcd}$$

$$M \longmapsto P(M) \longmapsto F(P(M)) \longmapsto F(P(M)) =\!=\!= : DF(M)$$

Notar que los funtores derivados a izquierda los hemos definido como

$$L_n F(M) := H_n(DF(M[0]))$$

donde $M \in A$-Mod y $M[0]$ es el complejo que tiene a M concentrado en grado cero.

Ejemplo 11.30. Si $F = (-) \otimes_A X : A$-Mod$\to k$-Mod, se denota $- \otimes_A^L X := DF$

$$M \mapsto P(M) \otimes_A X =: M \otimes_A^L X$$

Esta definido para complejos M. En particular si $M \in A$-Mod,

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, X) = H_n(M[0] \otimes_A^L X)$$