# Tópicos de Álgebra Homológica t- **Ejercicios**

Marco Farinati, Dto de Matemátca FCEyN UBA - IMAS Conicet

1er cuatrimestre 2020

# Índice

# 1. Ejercicios introductorios

## 1.1. Lema de la serpiente - I

1. Sea $A$ un anillo, $g \in U(A)$, y $M$ un $A$-módulo; definimos

$$M^g := \{m \in M : gm = m\},\ M_g := M/\{m - gm : m \in M\}$$

   a) Muestre que $M$ es un $\mathcal{Z}_g(A)$-módulo, donde $\mathcal{Z}_g(A) = \{a \in A : ag = ga\}$.

   b) Si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión exacta corta de $A$-módulos, muestre que

$$0 \to X^g \to Y^g \to Z^g \xrightarrow{\delta} X_g \to Y_g \to Z_g \to 0$$

   es exacta.

   c) Si la multiplicación por $g$ en $M$ tiene orden finito $n$ (por ejemplo si $g$ tiene orden finito) y la multiplicación por $n$ es inversible en $M$, muestre que la inclusión $M^g \to M$ compuesta con la proyección al cociente $M \to M_g$ da un isomorfismo

$$M^g \cong M_g$$

   d) Si $G$ es un grupo finito y $|G|$ es inversible en $A$ entonces el funtor $(-)^G$ es exacto (i.e. manda sucesiones exactas cortas en exactas cortas)

   Más generalmente, sea $k$ un anillo, $G$ un grupo, y $M$ un $k[G]$-módulo (es decir, un $k$-módulo providto de una acción de $G$ donde los elementos de $G$ actúan $k$-linealmente. Definimos

$$(\textit{invariantes}) \qquad M^G = \{m \in M : gm = m \forall g \in G\}$$

$$(\textit{coinvariantes}) \qquad M_G = \frac{M}{\langle gm - m : m \in M, g \in G\rangle}$$

2. Si $0 \to M \to N \to T \to 0$ es una s.e.c. de $k[G]$-módulos, entonces quedan inducidas sucesiones exactas

$$0 \to M^G \to N^G \to T^G$$

   y

$$M_G \to N_G \to T_G \to 0$$

3. A partir de ahora $G$ es finito. Muestre que $p_G := \sum_{g \in G} \in k[G]$ define una aplicación

$$M \to M^G$$
$$m \mapsto \sum_{g \in G} gm$$

   que se factoriza a través de $M_G$, es decir, que queda bien definida una aplicación

$$\overline{p} : M_G \to M^G$$
$$\overline{m} \mapsto \sum_{g \in G} gm$$

4. Qué significaría que $\overline{p} : (-)^G \to (-)_G$ sea una transformación natural entre los funtores coinvariantes e invariantes? Es $\overline{p}$ una transformcion natural?

5. Muestre que si $n = |G|$ es inversible en $k$ entonces $\overline{p}$ es una biyección para todo $M$. Concluya que en ese caso $(-)^G$ resulta un funtor exacto, o sea

$$0 \to M^G \to N^G \to T^G \to 0$$

es exacta para toda s.e.c. $0 \to M \to N \to T \to 0$

6. (Versión infinitesimal) $A$ anillo, $D \in A$, $M$ un $A$-modulo, se define

$$M^D = \{m \in M : Dm = 0\}, \; M_D = M/DM$$

Muestre que $M^D$ y $M_D$ son modulos sobre $\mathcal{Z}_D(A) = \{a \in A : Da = aD\}$. Muestre que si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión exacta corta de $A$-modulos, entonces

$$0 \to X^D \to Y^D \to Z^D \xrightarrow{\delta} X_D \to Y_D \to Z_D \to 0$$

es exacta.

7. Sea $A$ un dominio integro, $K$ su cuerpo de fracciones, si $M$ es un $A$-modulo se define

$$M_K = \left\{ \frac{m}{a} : m \in M, \; a \in A \setminus \{0\} \right\}$$

$j_M : M \to M_K$ por $j(m) = \frac{m}{1}$, y

$$t(M) = \{m \in M : \exists a \in A \setminus \{0\} \text{ con } am = 0\}$$

Mostrar que $t(M) = \mathrm{Ker} j_M$ y que si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una s.e.c. de $A$-modulos entonces existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \to t(X) \to t(Y) \to t(Z) \xrightarrow{\delta} X_K/j(X) \to Y_K/j(Y) \to Z_K/j(Z) \to 0$$

## 1.2. Funtores

Sean $F, G : C \to D$ dos funtores. Recordamos una *transformación natural* $\eta : F \to G$ es dar, para cada $X \in \mathrm{Obj}(C)$, un morfismo $\eta_X : F(X) \to G(X)$ (en $D$) que verifica que, para todo morfismo $f : X \to Y$ (en $C$), el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Si $\forall X \in \mathrm{Obj}(C)$ resulta $\eta_X$ un isomorfismo, $\eta$ se dice un *isomorfismo natural*.

1. Muestre que $O_4 : Gr \to Sets$ dado por
$$O_4(G) = \{g \in G : g^4 = 1\}$$
(parte del ej es ver que es funtor) y $\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_4, -) : Gr \to Sets$ son naturalmente isomorfos. Mas precisamente,
$$\eta_G : O_4(G) \to \mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_4, G)$$
definido por
$$\eta_G(g) = \text{ el unico morfismo } f : \mathbb{Z}_4 \to G \text{ determinad por } f(1) = g$$
es un isomorfismo natural de funtores.

2. (pares que conmutan) Sea $F : Gr \to Sets$ dado por
$$F(G) = \{(g, h) \in G \times G : gh = hg\}$$
es funtorial, es decir, si $f : G_1 \to G_2$ es un morfismo de grupos entonces $(f(g), f(h)) \in F(G_2)$ si $(g, h) \in F(G_1)$. Muestre que este funtor es naturalmente isomorfo a (i.e. existe un isomorfismo natural con) $\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, -)$.

3. Se $F : Gr \to Sets$ dado por $F(G) = \{(g, h) \in G \times G : g^3 = 1,\ h^2 = 1,\ gh = hg^{-1}\}$. Es $F$ de la forma $\mathrm{Hom}_{Gr}(G_0, -)$ para algun grupo $G_0$?

4. Muestre que $j_M : M \to M_K$ es una transformacion natural entre Id y $(-)_K$.

5. Sea $f : X \to Y$ es un morfismo en una categoria $C$, entonces $f$ induce una transformacion natural
$$f^* : \mathrm{Hom}_C(N, -) \to \mathrm{Hom}_C(M, -)$$
via
$$f^*_X : \mathrm{Hom}_C(N, X) \to \mathrm{Hom}_C(M, X)$$
$$\phi \mapsto \phi \circ_C f$$
Muestre que los funtores $\mathrm{Hom}_C(N, -)$ y $\mathrm{Hom}_C(M, -)$ son naturalmente isomorfos sí y sólo si $M$ y $N$ son isomorfos en $C$ (i.e. existen morfismos $f : M \to N$ y $g : N \to M$ tales que $f \circ_C g = \mathrm{Id}_N$ y $g \circ_C f = \mathrm{Id}_M$).

6. Sea $C$ una categoría tal que $\mathrm{Obj}(C)$ es un conjunto con un ‘unico elemento $*$, muestre que $M := \mathrm{Hom}_C(*, *)$ es un monoide con neutro, y que dar funtor $C \to C$ es lo mismo que dar $f : M \to M$ un morfismo de monoides que preservan la unidad.

7. Si $C$ y $D$ son dos posets vistos como categorías, entonces un funtor $f : C \to D$ es lo mismo que una función monótona creciente $C \to D$.

8. Sea $A$ un anillo y $A$-bimod la categoría de $A$-bimodulos. Muestre que
$$M^A := \{m \in M : am = ma\ \forall a \in A\}$$
es un funtor $A$-bimod$\to$ $Z(A)$-bimod, exacto a izquierda, es decir, si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una s.e.c. entonces
$$0 \to X^A \to Y^A \to Z^A$$
es exacta. Es $(-)^A$ de la forma $\mathrm{Hom}_{A\text{-bimod}}(M_0, -)$ para algún bimodulo $M_0$?

9. Si $M \in A$-bimod, definimos

$$\mathrm{Der}(A, M) = \{D : A \to M : D(a+b) = D(a) + D(b),\ D(ab) = aD(b) + D(a)b\}$$

Muestre que $\mathrm{Der}(A, M)$ es un subgrupo abeliano de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M)$ y que $\mathrm{Der}(A, -)$ : $A-$bimod$\to$ $Ab$ es un funtor. Además, si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una s.e.c. de $A$-bimodulos,

$$0 \to \mathrm{Der}(A, X) \to \mathrm{Der}(A, Y) \to \mathrm{Der}(A, Z)$$

es exacta.

10. Si $M$ es un $A$-bimódulo, consideramos el anillo

$$B = B(M) := A \oplus M$$

con la suma usual, es decir $(a+m)+(a'+m') = (a+a')+(m+m')$, y el producto dado por

$$(a+m)(a'+m') = aa' + am' + ma'$$

Notar que $M$ se identifica con un subgrupo abeliano de $B$, que además es un ideal bilatero de cuadrado cero. Notar tambien que la proyección $\pi : B \to A$ es morfismo de anillos.

   *a*) $B(-)$ es un funtor de la categoría de $A$-bimodulos en la categoría de anillos, y $\pi$ es una transformacion natural entre $B(-)$ y el funtor constantemente $A$ (el funtor que asigna $A$ a todo bimodulo, y la identidad de $A$ a toda flecha).

   *b*) Muestre que $s : A \to B(M)$ es una sección de $\pi$ que es morfismo de anillos sí y sólo si $s$ es de la forma

   $$s(a) = a + D(a)$$

   con $D \in \mathrm{Der}(A, M)$.

11. (*) Sea $M$ una variedad diferenciable compacta, mostrar que todo morfismo de anillos $\mathbb{R}$-lineal $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ es de la forma $ev_p$ para algún $p$, donde $ev_p(f) = f(p)$, es decir

$$M \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-alg}(C^\infty(M), \mathbb{R})$$

$$p \mapsto ev_p$$

Muestre además que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-alg}(C^\infty(M), \mathbb{R}[x]/x^2) \cong TM$$

## 1.3. Egalizador, coegalizador, límites y colímites

1. Escribir la definición de egalizador y coegalizador.

   - Mostrar que en Sets, el egalizador de $f, g : X \to Y$ esta dado por (la inclusión de) el subconjunto de $X$ en donde las funciones coinciden, y el coegalizador está dado por (la proyección a) el cociente de $Y$ por la relación $f(x) \sim g(x)$, $\forall x \in X$.

- Calcular egalizador y coegalizador en grupos abelianos.

2. Mostrar que $p$ es el coegalizador de $f, g : X \to Y$ en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "p"] & Z \end{tikzcd}$$

si y solo si, para todo objeto $W$, el siguiente es un diagrama de egalizador en Sets:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \arrow[r, "p^*"] & \mathrm{Hom}(Y, W) \arrow[r, shift left, "f^*"] \arrow[r, shift right, "g^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \end{tikzcd}$$

3. Dualmente, mostrar que $i$ es el *coegalizador* de $f, g : X \to Y$ en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

si y solo si, para todo objeto $W$, el siguiente es un diagrama de *egalizador* en Sets:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \arrow[r, "i_*"] & \mathrm{Hom}(W, X) \arrow[r, shift left, "f_*"] \arrow[r, shift right, "g_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \end{tikzcd}$$

*Observación: tanto en el caso de egalizador como de COegalizador, al tomar Hom, como en uno es en una variable y en el otro caso en la otra, ambos se traducen a egalizadores en Sets.*

4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría donde existen coproductos arbitrarios y coegalizadores. Sea $(I, \leq)$ un poset y $(X_i \overset{\iota_{ij}}{\to} X_j)_{i \leq j}$ un sistema directo en $\mathcal{C}$. Consideramos $\coprod_I X_i$ (existe por hipótesis). Notar que para cada $i \leq j$, el siguiente diagrama NO necesariamente conmuta

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_{ij}"] \arrow[rr, bend right, "\iota_i"'] & X_j \arrow[r, "\iota_j"] & \coprod_I X_i \end{tikzcd}$$

Llamemos $f_{ij} := \iota_j \circ \iota_{ij}$. Como para cada $i \leq j$ estan definidos

$$X_i \xrightarrow{f_{ij}} \coprod_I X_i$$

$$X_i \xrightarrow{\iota_i} \coprod_I X_i$$

la propiedad universal del coproducto (no sobre $I$ sino sobre todos los pares $(i, j)$ tales que $i \leq j$) determina un único morfismo para las $f_i$

$$f : \coprod_{\{(i,j):i \leq j\}} X_i \to \coprod_I X_i$$

y otro único morfismo para las $\iota_i$

$$\iota : \coprod_{\{(i,j):i \leq j\}} X_i \to \coprod_I X_i$$

Muestre que el coegalizador de $f$ y $\iota$ tiene la propiedad universal del colimite:

$$\coprod_{\{(i,j):i\leq j\}} X_i \underset{\iota}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \coprod_I X_i \xrightarrow{p} \lim_{\to I} X_i \ := Coegalizador(f,\iota)$$

Las flechas $X_i \to \mathrm{lím}_I X_i$ estan dadas por la composición de la flecha correspondiente a $i \leq i$ que va de $X_i$ en $\coprod_{\{(i,j):i\leq j\}} X_i$, compuesta con $f$ (o con $\iota$, da lo mismo!) y compuesta con $p$.

5. Dualmente, muestre que si $\mathcal{C}$ es una categoría donde existen productos arbitrarios y egalizadores, entonces existen limites inversos arbitrarios. *sugerencia: dar vuelta las flechas y comparar lo que se tiene con la descripción del límite inverso en Sets.*

## 1.4. Producto tensorial

1. Muestre que la multiplicación $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ induce un isomorfismo $\mathbb{Z}_n\otimes\mathbb{Z}_m\cong\mathbb{Z}_{(n:m)}$ ($a\otimes b\mapsto ab$).

2. Si $M$ es un grupo abeliano, $\mathbb{Z}_p\otimes M\cong M/pM$.

3. Muestre que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\cong\oplus_p\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Muestre que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es divisible (y de torsión).

4. Sea $T$ un grupo abeliano de torsión y $D$ divisible, mostrar que $D\otimes_{\mathbb{Z}}T=0$. Mostrar que si $T$ tiene $p$-torsión y la multiplicación por $p.:D\to D$ es sobreyectiva ($D$ es $p$-divisible) entonces también $D\otimes_{\mathbb{Z}}T=0$

5. Sea $A$ un anillo íntegro, muestre que $M$ es un $A$-módulo divisible y sin torsión si y sólo si es un $K$-espacio vectorial ($K$=cuerpo de fracciones de $A$).

6. Sea $A$ un anillo que es subanillo de $B$, $M_B$, ${}_BN$ dos $B$-módulos, muestre que

$$M\otimes_B N=(M\otimes_A N)/\langle mb\otimes_A n-m\otimes_A bn : m\in M,\ n\in N,\ b\in B\rangle$$

7. Si $M$ es un $k[x]$-módulo y $k$ es el $k[x]$-módulo dado por $x.\lambda=0$ ($\lambda\in k$), entonces

$$k\otimes_{k[x]}M\cong M/xM$$

8. Sea $V$ es $k$-espacio vectorial de dimensión finita, $f\in\mathrm{End}_k(V)$ y $M$ el $k[x]$-módulo dado por $V$ y $f$. Sea $\lambda_0\in k$ y $k_{\lambda_0}=k$ como espacio vectorial pero con la estructura de $k[x]$-módulo dada por $p(x),1=p(\lambda_0)$. Mostrar que

   *a*) Si $\lambda_0$ NO es autovalor de $f\Rightarrow k_{\lambda_0}\otimes_{k[x]}M=0$. Compare con ejercicio 5.

   *b*) Asumamos $f$ diagonalizable y $\lambda_0$ un autovalor, entonces $k_{\lambda_0}\otimes_{k[x]}M\cong V_{\lambda_0}$ (el subespacio de autovectores de autovalor $\lambda_0$).

   *c*) Si $f$ no es diagonalizable pero $\lambda_0$ es autovalor, entonces $k_{\lambda_0}\otimes_{k[x]}M$ calcula el subespacio de autovectores de autovalor $\lambda_0$ o el subespacio de $(x-\lambda_0)$-torsión?

9. Si $A$ es subanillo de $B$ (o si se tiene dado un morfismo de anillos $f : A \to B$) y ${}_AM$ es un $A$-módulo, se define la *extensión de escalares* como $B \otimes_A M$. Muestre que si $N$ es un $B$-módulo (en particular es $A$-módulo, via $a \cdot n = f(a)n$) entonces

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

10. Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. se define $V[i] := V \oplus Vi$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, con la estructura de $\mathbb{C}$ espacio vectorial dada por, si $z = a + bi \in \mathbb{C}$ y $w = u + vi$,

$$z \cdot w := (au - bv) + (av + bu)i$$

Muestre que esta construcción es funtorial (entre la categoria de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y la de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Muestre que $V[i] \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$.

11. Sea $W$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial provisto de una involución $\sigma$, es decir, $\sigma : W \to W$ es $\mathbb{R}$-lineal, $\sigma^2 = \mathrm{Id}_W$, y $\sigma(zw) = \overline{z}\sigma w$ si $w \in W$ y $z \in \mathbb{C}$. Muestre que, si $W^\sigma = \{w \in W : \sigma(w) = w\}$ entonces $\dim_{\mathbb{R}}(W^\sigma) = \dim_{\mathbb{C}}(W)$ y $W \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W^\sigma$, más aún, bajo esa identificacion, la involución de $W$ se corresponde con la conjugación de $\mathbb{C}$ tensor la identidad de $W^\sigma$.

12. Si $A$ y $B$ son dos anillos, muestre que la formula

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') := (aa') \otimes (bb')$$

esta bien definida (como aplicación $(A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \times (A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \to A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ y, en caso que $1_A \otimes 1_B \neq 0$, define una estructura de anillo en $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$.

13. Muestre que en la categoría de anillos conmutativos, $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ es el coproducto. En la categoría de $k$-álgebras conmutativas, el coproducto es $A \otimes_k B$.

14. Muestre que $k[x, y] \cong k[x] \otimes_k k[y]$. Si $G$ y $H$ son grupos (o monoides con 1) $\Rightarrow$ $k[G \times H] \cong k[G] \otimes_k k[H]$.

15. Muestre que el isomorfismo del ejercicio 1 ($\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{(m:n)}$) es un iso de anillos.

16. Sean $A$, $B$, $C$ anillos conmutativos y consideramos $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ como anillo. Muestre

$$\mathrm{Hom}_{anillos}(A \otimes_{\mathbb{Z}} B, C) \cong \mathrm{Hom}_{anillos}(A, C) \times \mathrm{Hom}_{anillos}(B, C)$$

17. Bajo la identificación $B^{op}$-módulos a izquierda $\equiv$ $B$-módulos a derecha muestre que

$${}_A\mathrm{mod}_B = {}_{A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{op}}\mathrm{mod}$$

18. Muestre que existe un isomorfismo de $\mathbb{C}$-algebras: $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

19. Sea $G$ grupo, $V$ y $W$ $k[G]$-módulos, entonces en $V \otimes W$ la formula $g \cdot (v \otimes w) := gv \otimes gw$ define una estructura de $k[G]$-módulo. Tambien $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ es $k[G]$-módulo via $(g \cdot \phi)(v) := g\phi(g^{-1}v)$. Muestre que si en $k$ ponemos la acción trivial, entonces en particular $V^*$ es un $k[G]$-módulo y el isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes W$$

es de $k[G]$-módulos. Tambien $\mathrm{Hom}_{k[G]}(V, W) = (\mathrm{Hom}_k(V, W))^G$.

20. Diremos que $M_A$ es $A$-playo si $M \otimes_A -$ es exacto.

   *a*) $M_A$ es $A$-playo si y sólo si $M \otimes_A -$ preserva monomorfismos.

   *b*) Muestre que sumas directas de playos y sumandos directos de playos son playos.

   *c*) (Proyectivo implica playo) El módulo a derecha $M = A_A$ es $A$-playo, luego si $M$ es $A$-proyectivo (visto como $A$-módulo a derecha) entonces es playo.

   *d*) Si $A$ es integro y $K$ su cuerpo de fracciones, entonces $K$ es playo. Muestre que si $A \neq K$ entonces $K$ no es proyectivo. (sugerencia, muestre que todo par de elementos de $K$ son l.d. y use esto para ver que $K$ no esta contenido en ningun $A$-libre salvo que $K = A$).

   *e*) $S$ subconjunto multiplicativo de $A$, entonces $S^{-1}A$ es $A$-playo.

   *f*) (no tan facil) Sea $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ una s.e.c. de módulos sobre un anillo, si $Y$ y $Z$ son playos, muestre que $X$ es playo. (un poco mas fácil) si $X$ y $Z$ son playos entonces $Y$ es playo.

## 1.5. Proyectivos

1. Muestre que $P$ es proyectivo si y sólo si toda sucesion exacta del tipo

$$0 \to X \to Y \to P \to 0$$

   se parte.

2. Exiba sucesiones exactas cortas de modulos sobre algun anillo que no se partan (en particular habra exibido modulos no proyectivos).

3. Sea $F : A\text{-mod} \to Ab$ un funtor aditivo (i.e. $F(f_1 + f_2) = F(f_1) + F(f_2)$) y

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

   una s.e.c. que se parte, mostrar que

$$0 \to FX \to FY \to FZ \to 0$$

   es exacta, mas aun: se parte.

4. $P$ es proyectivo si y sólo si es sumando directo de un libre, y si $P$ es finitamente generado (f.g.) entonces es sumando directo de un libre f.g.

5. Si $M$ es un $A$-modulo a izquierda entonces

$$M^* := \mathrm{Hom}_A(M, A)$$

   es un $A$-modulo a derecha via

$$(f \cdot a)(m) := f(am)$$

6. Sean $P$ y $N$ dos $A$-módulos y considere la siguiente aplicación

$$P^* \times N \to \mathrm{Hom}_A(P,N)$$

$$(f,n) \mapsto \Big(p \mapsto f(p)n\Big)$$

Muestre que es bilineal y $A$-balanceada, por lo tanto define un morfismo de gupos abelianos

$$P^* \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(P,N)$$

$$f \otimes n \mapsto \Big(p \mapsto f(p)n\Big)$$

Muestre que la clase de módulos $P$ tal que la aplicación anterior es un iso para cualquier $N$ es cerrad por sumas directas finitas y sumandos directos. Muestre que esa clase contienen a $P = A$. Concluya que para todo proyectivo de tipo finito $P$, la aplicación anterior es un iso.

7. Sea $P$ proyectivo f.g. y $p_1, \cdots p_n$ un sistema de generadores. Muestre que existen $\phi_1, \dots, \phi_n \in P^*$ tales que para todo $x \in P$ vale

$$x = \sum_i \phi_i(x) p_i$$

es decir, $\mathrm{Id} = \sum_i \phi_i \otimes_A p_i \in P^* \otimes P \cong \mathrm{End}_A(P)$

8. Muestre que si $\mathrm{Id}_M$ esta en la imagen de $M^* \otimes_A M \to \mathrm{End}_A(M)$ entonces $M$ es proyectivo de tipo finito.

9. Sea $A = k[x]$ y $M = k \cong k[x]/(x)$, muestre que

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{\pi} k \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva.

10. Sea $A = k[x]/(x^2)$ y $M = k \cong k[x]/(x)$, muestre que

$$\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{\pi} k \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva.

11. Sea $A = k[x]/(x^N)$ con $N \geq 2$ y $M = k \cong k[x]/(x)$, muestre que

$$\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{x^{N-1}} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x^{N-1}} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{\pi} k \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva.

12. Sea $A = k[x,y]$, muestre que la siguiente es una sucesion exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{d_2} A \oplus A \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{\pi} A/(x,y) \longrightarrow 0$$

donde $d_2(p) = (yp, -xp)$ y $d_1(p,q) = xp + yq$.

## 1.6. Inyectivos

1. Muestre que $I$ es inyectivo si y solo si toda sucesion exacta del tipo

$$0 \to I \to X \to Y \to 0$$

se parte. Obserar que el ejercicio 2 de la seccion anterior exhibe modulos no inyectivos.

2. Sea $A$ un anillo, probar que son equivalentes

   - Todo $A$-modulo es proyectivo.
   - Todo $A$-modulo es inyectivo.

3. Sea $A$ un dip (dominio de ideales principales), muestre que $I$ es inyectivo si y solo si es $A$-divisible (i.e. para todo $x \in I$, si $a \in A \setminus \{0\}$ entonces existe $\widetilde{x} \in I : a\widetilde{x} = x$). En particular si $K$ es el cuerpo de fracciones de $A$, $K$ es $A$-inyectivo, tambien $K/A$.

4. Sea $A = k[x]$ y $I = k[t]$ como espacio vectorial, con la estructura de $k[x]$-modulo dada por

$$x \cdot t^n = t^{n-1} \text{ si } n > 0 \text{ y } x \cdot 1 = 0$$

Muestre que $I$ inyectivo. Observar que $k = k[x]/(x) \hookrightarrow I$ como $k[x]$-modulo.

5. Sea $k$ un cuerpo y $A$ una $k$-algebra, si $M$ es un $A$-modulo a derecha, se define el $A$-modulo a izquierda

$$M' := \mathrm{Hom}_k(M, k)$$

(no confundir con $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$) con la estructura de $A$-modulo (a izquierda) dada por

$$(a \cdot \phi)(m) := \phi(ma)$$

Mostrar que si $M$ es $A$-playo (en particular si $M$ es proyectivo, o libre), entonces $M'$ es inyectivo.

6. Sea $A = k[x]$, muestre que si $M = k[t]$ como en el ejercicio 3, entonces $M$ se identifica con un submodulo de $A'$.

## 1.7. Más sobre Proyectivos e inyectivos

7. Si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es un sucesión exacta corta de $A$-módulos y $P \to X$, $Q \to Z$ son epi, con $P$ y $Q$ proyectivos:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \\
P \arrow[r, "p"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
 & Y \arrow[d, "g"] & \\
Q \arrow[r, "q"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Mostrar que se puede completar a un diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i_P"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
P \oplus Q \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\pi_Q"] & Y \arrow[r, dotted] \arrow[d, "g"] & 0 \\
Q \arrow[r, "q"] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

8. Sea $A$ un anillo. Muestre que son equivalentes

   *a*) Todo módulo es proyectivo.

   *b*) Todo módulo es inyectivo.

   *c*) Todo submódulo es un sumando directo.

   *d*) (un poco mas difícil, mucho Zorn..) Todo módulo es suma directa de simples.

9. (un poco mas difícil) Sea $A$ como en el ejemplo anterior. Supongamos que existe una única clase de isomorfismo de simples. Es decir, sea $S_0$ un $A$-módulo simple, y asumimos que si $S$ es simple, entonces $S \cong S_0$. Muestre que necesariamente $A \cong M_n(D)$ para cierto $n \in \mathbb{N}$ y $D$ un anillo de división. (Sugerencia: primero caracterizamos $A^{op}$, usamos el isomorfismo de anillos $A^{op} \cong \mathrm{Hom}_A(A, A)$, habiendo descompuesto a $A$ (como $A$-módulo a izquierda) como suma directa de simples.)

## 1.8. Álgebras de Frobenius

En esta sección $k$ es cuerpo, $A$ es $k$-álgebra (i.e. $k \subseteq Z(A)$) **de dimensión finita**.
Una forma bilineal **balanceada** es una función $\phi : A \times A \to k$ bilineal tal que

$$\phi(xa, y) = \phi(a, xy), \ \forall a, x, y \in A$$

Se dice **no degenerada** si la aplicación $A \to A'$ $\Big(a \mapsto \phi(a, -)\Big)$ es inyectiva.

Recordamos que si $M$ es un $A$-módulo a *derecha*, entonces $M' := \mathrm{Hom}_k(M, k)$ (no confundir con $\mathrm{Hom}_A(M, A)$) es un $A$-módulo a izquierda via

$$(a \cdot f)(m) := f(ma)$$

También, si $M$ fuera un $A$-módulo a *izquierda*, entonces $M'$ resulta $A$-módulo *derecha* via

$$(f \cdot a)(m) := f(am)$$

1. Sea $\phi : \times A \to k$ bilineal $A$-balanceada, entonces $\widetilde{\phi} :^{op} \times A^{op} \to k$ dada por

$$\widetilde{\phi}(a, b) := \phi(b, a)$$

   es $A^{op}$-balanceada. Además $\widetilde{\phi}$ es no degenerada si y solo si $\phi$ es no degenerada.

2. Muestre que efectivamente $M'$ es un $A$-módulo del otro lado que $M$. Además, si $\dim_k M < \infty$, el iso standard $M \cong M''$ es $A$-lineal.

3. Son equivalentes

   a) existe un isomorfismo de $A$-módulos a izquierda ${}_AA \cong (A_A)'$,

   b) existe una forma bilineal $A$-balanceada no degenerada.

   En cualquiera de esos casos, $A$ se dirá un **álgebra de Frobenius**

4. $A$ es Frobenius $\iff$ $A$ es inyectivo como $A$-módulo a izquierda ( $\iff$ a derecha).

5. Sea $A$ un álgebra de Frobenius. Muestre que $M$ es proyectivo $\iff$ $M$ es inyectivo.

6. Muestre que las siguientes son álgebras de Frobenius:

   a) $k[x]/x^2$. Más en general, si $A = k[x]/(x^{N+1})$, definimos $\phi : A \to k$ por el coeficiente de grado máximo, es decir, si $a = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N$ con $a_i \in k$, $\phi(a) = a_N$. Muestre que $\langle a, b\rangle := \phi(ab)$ es una forma bilineal balanceada no degenerada, por lo tanto $A$ es Frobenius.

   b) $k\{x, y\}/(x^2, xy + yx, y^2)$. (En general, un álgebra exterior en un espacio vectorial de dimensón finita es Frobenius)

   c) $M_n(k)$ (sugerencia: considerar la traza del producto).

   d) $k[G]$ donde $G$ es un grupo finito.

   e) Si $A$ y $B$ son Frobenius, entonces $A \times B$ y $A \otimes B$ también lo son.

7. Sea $M$ un $A$-módulo a izquierda finitamente generado. Buscamos un monomorfismo $i : M \to I$ con $I$ inyectivo:

   - Sea $p : P \to M$ un epi de módulos a iq., con $P$ proyectivo (por ejemplo, $P = A \otimes M$. Muestre que
   $$p' : M' \to P'$$
   es un monomorfismo de $A$-módulos a derecha, con $P'$ inyectivo como $A$-modulo a derecha.

   - Lo mismo cambiando izq$\leftrightarrow$derecha.

   - Sea $\widetilde{p} : \widetilde{P} \to M'$ un epi con $\widetilde{P}$ proyectivo a derecha
   $$\textit{por ejemplo } P := M' \otimes A \xrightarrow{\widetilde{p}} M'$$
   $$f \otimes a \mapsto f \cdot a$$
   Muestre que
   $$(\widetilde{p})' : M'' \to P'$$
   es un monomorfismo de $A$-modulos a izq., y que $P'$ es inyectivo a izq.

- Usando el isomorfismo standard $M \cong M''$ y tomando $P = M' \otimes A_A$ (donde $A_A$ denota a $A$ visto como $A$-modulo a derecha), junto con el isomorfismo $P' = (M' \otimes A_A)' \cong (A_A)' \otimes M'' \cong (A_A)' \otimes M$, donde la estructura de $A$-modulo a derecha $M' \otimes A_A$ viene de $A_A$ y la de $A$-módulo a izquierda de $(A_A)' \otimes M''$ (y de $(A_A)' \otimes M$) viene de $(A_A)'$, explicite la fórmula de la inclusión inyectiva

$$M \to A' \otimes M$$

8. Explicitar lo anterior para $A = k[x]/(x^2)$. (eventualmente, explicitar para $k[x]/(x^{N+1})$)

9. Las siguientes son álgebras graduadas de dimensión finita (muéstrelo encontrando bases), y el grado máximo tiene dimensión uno. Sea $\phi$= coeficiente de grado máximo en una base del subespacio vectorial de grado máximo. Notar (haga la cuenta en los ejemplos primero) que $\phi$ depende de la base, pero está determinada a menos de múltiplo escalar no nulo. Muestre que $\langle (a,b) := \phi(ab)$ es una forma bilineal no degenerada $A$-balanceada, luego, cada una de ellas es Frobenius:

   *a*) $A = k[x,y](xy, x^2 + y^2)$

   *b*) $k\{x,y\}/(x^2, y^3, xy = qyx)$ (donde $q \in k \setminus \{0\}$)

   *c*) $k\{x,y,z\}/(x^2, y^2, z^2, xyz + yzx + zxy, xzy + zyx + yxz)$ (no comutativa)

## 1.9. Lema de la serpiente - II

1. Completar la demostración del lema de la serpiente.

2. Interpretar los ejercicios de la lista "Lema de la serpiente 1" en términos del Lema de la Serpiente (o de su conclusión: la s.e.larga en homología). *Sugerencia: si $f : M_1 \to M_2$ es un morfismo de $A$-módulos, entonces se lo puede ver como un complejo "de largo 2"*

$$\cdots \to 0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \to 0 \to \cdots$$

   *y un morfismo de s.e.c. de $A$-módulos*
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f_X"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "f_Y"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "f_Z"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   *se lo puede ver como una s.e.c. de complejos (verticales, de largo 2).*

3. (naturalidad de $\delta$) si
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[ddr, dashed] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[ddr, dashed] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[ddr, dashed] & 0 & \\ 0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[ddr, dashed] & Q \arrow[r] \arrow[ddr, dashed] & R \arrow[ddr, dashed] & & \\ & & X' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & P' \arrow[r] & Q' \arrow[r] & R' & \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo con flechas horizontales exactas, y llamemos $f$ a las flechas punteadas ($f_M\colon M \to M'$), entonces $f$ induce un morfismo de s. exactas

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "f_X|"] & \mathrm{Ker}(\beta) \arrow[r] \arrow[d, "f_Y|"] & \mathrm{Ker}(\gamma) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_Z|"] & \mathrm{CoKer}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f_P}"] & \mathrm{CoKer}(\beta) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f_Q}"] & \mathrm{CoKer}(\gamma) \arrow[d, "\overline{f_R}"] \\
\mathrm{Ker}(\alpha') \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\beta') \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\gamma') \arrow[r, "\delta'"] & \mathrm{CoKer}(\alpha') \arrow[r] & \mathrm{CoKer}(\beta') \arrow[r] & \mathrm{CoKer}(\gamma')
\end{tikzcd}$$

4. Definir morfismo entre sucesiones exactas cortas de complejos. Mostrar que si

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "a"] & Y_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Z_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'_\bullet \arrow[r] & Y'_\bullet \arrow[r] & Z'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es un morfismo de s.e.c. de complejos, entonces $a, b, c$, inducen morfismos de s.e. largas de sus homologías, es decir, un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(Z) \arrow[r] \arrow[d, "c"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "a"] & H_n(Y) \arrow[r] \arrow[d, "b"] & H_n(Z) \arrow[r] \arrow[d, "c"] & H_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "a"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(Z') \arrow[r] & H_n(X') \arrow[r] & H_n(Y') \arrow[r] & H_n(Z') \arrow[r] & H_{n-1}(X') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

5. Sea $k$ un cuerpo y $A = k[x, y]$, $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ una s.e.c. de $A$-módulos y consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_1"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_1"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "d_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \oplus X \arrow[r, "f\oplus f"] \arrow[d, "d_2"] & Y \oplus Y \arrow[r, "g\oplus g"] \arrow[d, "d_2"] & Z \oplus Z \arrow[r] \arrow[d, "d_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde $d_1(m) = (-ym, xm)$, $d_2(m, m') = xm + ym'$, $(m, m' \in X, Y, Z)$. Muestre que las filas son exactas y las columnas son complejos (i.e. $d_2 d_1 = 0$), por lo tanto se lo puede interpretar como una s.e.c. de complejos (los complejos escritos verticalmente)

$$\text{“}0 \to X_\bullet \to Y_\bullet \to Z_\bullet \to 0''$$

Si definimos, para $M$ un $A$-módulo, los invariante y coinvariantes respectivamente por

$$M^{x,y} := \{m \in M : x \cdot m = 0 = y \cdot m\}$$

$$M_{x,y} := \frac{M}{x \cdot M + y \cdot M}$$

entonces, para cada s.e.c. en ${}_A Mod$ $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ $\exists$ una s.e.larga de la forma

$$0 \to X^{x,y} \to Y^{x,y} \to Z^{x,y} \to H^1_X \to H^1_Y \to H^1_Z \to X_{x,y} \to Y_{x,y} \to Z_{x,y} \to 0$$

donde $H^1_M$ es el funtor que a un $A$-módulo $M$ le asigna la homología del complejo

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_1} M \oplus M \xrightarrow{d_2} M \longrightarrow 0$$

en el lugar donde está $M \oplus M$.

6. Sea $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, presentado como grupo abeliano libre con dos generadores $g_1$ y $g_2$. Si $M$ es un $k[G]$-módulo, definimos una estructura de $k[x, y]$-módulo vía

$$x \cdot m = (1 - g_1) \cdot m, \qquad\qquad y \cdot m = (1 - g_2) \cdot m$$

Muestre que $M^{x,y} = M^G$ y que $M_{x,y} = M_G$. Explicitar lo más que pueda la s. exacta anterior relacionando $G$-invariantes y $G$-coinvariantes.

7. Consideremos un diagrama conmutativo con filas exactas de la forma

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_4 \arrow[d, "f_4"] \\ Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \end{tikzcd}$$

Muestre que si $f_2$ y $f_4$ son monos y $f_1$ epi, entonces $f$ es mono. Dualmente, si se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "f4"] & X_5 \arrow[d, "f_5"] \\ Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5 \end{tikzcd}$$

con $f_2$ y $f_4$ epi, y $f_5$ mono, entonces $f$ es epi. Concluir el siguiente:

8. (Lema de los 5) Si $f_{1,2,4,5}$ son isos, entonces $f$ es iso.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "f4"] & X_5 \arrow[d, "f_5"] \\ Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5 \end{tikzcd}$$

(Ver Ejercicio 4) Dado un morfismo de sucesiones exactas cortas de complejos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "a"] & Y_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Z_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X'_\bullet \arrow[r] & Y'_\bullet \arrow[r] & Z'_\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Si dos de las flechas $a, b, c$, inducen isomorfismo en homología, entonces la tercera también.

9. Sean ahora $0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$ una s.e.c. de complejo de COcadenas, es decir, $d(M^n) \subseteq M^{n+1}$, para $M = X, Y, Z$. Con el truco $\widetilde{M}_n := M^{-n}$ (o rehaciendo la demostración) muestre que esa s.e.c. induce una s.e.larga de la forma

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(Z) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^n(Y) \longrightarrow H^n(Z) \longrightarrow H^{n+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

donde $H^n(M) = \dfrac{\mathrm{Ker}(d\colon M^n \to M^{n+1})}{d(M^{n-1})}$

10. (*En algún momento se requiere partición de la unidad*) Sea $M$ una variedad diferenciable, $\Omega^k_c(M)$ las $k$-formas a soporte compacto, $U$ y $V$ dos abiertos de $M$ tales que $V \cup U = M$. En general, si $X$ es un abierto de $M$, identificamos $\Omega^k_c(X) \subset \Omega^k_c(M)$ como las formas de $M$ con soporte contenido en $X$. Muestre que existe una sucesión exacta de complejos de De Rham (de formas a soporte compacto)

$$0 \to \Omega^\bullet_c(U \cap V) \to \Omega^\bullet_c(U) \oplus \Omega^\bullet_c V \to \Omega^\bullet_c M \to 0$$

y por lo tanto una sucesión exacta larga en $H_c$ (donde $H^n_c$=$H^n(\Omega^\bullet_c)$= cohomologia de las formas a soporte compacto). Notar que la intersección y la unión están "al revés" con respecto a Mayer-Vietoris usual.

Por otro lado, la restricción a un abierto da morfismos $\Omega^k(M) \to \Omega^k(X)$ para cualquier abierto $X$, por lo tanto hay una sucesión de formas (no nec. a soporte compacto)

$$0 \to \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \to \Omega^\bullet(U \cap V) \to 0$$

que es exacta (la exactitud a izquierda es muy fácil, la exactitud a derecha necesita partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U, V\}$). Deducir la sucesión exacta larga para cohomología de De Rham.

# 2. Complejos de cadenas

Si $A$ es un anillo, Chain($A$) denota la categoría de complejos de $A$-módulos (con diferenciales $A$-lineales y morfismos de complejos $A$-lineales).

1. Sea $f : (M, d) \to (N, \partial)$ un morfismo de complejos. Muestre que $(\mathrm{Ker}(f), 0)$ es un subcomplejo de $(M, d)$, donde $Ker(f)_n = \mathrm{Ker}(f_n) \subseteq M_n$. Muestre que la imagen (lugar a lugar) de $f$ es un subcomplejo de $(N, \partial)$ y que si definimos $\mathrm{CoKer}(f)_n := N_n/Im(f_n)$ entonces $\partial$ induce un diferencial $\overline{\partial}$ en CoKer($f$), y éste tiene la propiedad universal del cociente. Es decir, para todo morfismo de complejos $g : (N, \partial) \to (W, d_W)$ tal que $fg = 0$, existe un unico $\overline{g} : (\mathrm{CoKer} f, \overline{\partial}) \to (W, d_W)$ morfismo de complejos con $\overline{g}\pi = g$.

2. Sea $f : M \to N$ (omitimos los diferenciales en la notacion) un morfismo de complejos.

   *a*) Si $f$ es monomorfismo (i.e. todas las $f_n$ son monomorfismos) entonces Cono($f$) es cuasi-isomorfo a $N/f(M)$.

   b) Si $f$ es epimorfismo, entonces $\mathrm{Cono}(f)$ es quasi-isomorfo a $\mathrm{Ker}(f)[-1]$

3. Muestre que $\mathrm{Cono}(\mathrm{Id})$ es contráctil.

4. Si $(M, d_M)$ es un complejo de $A$-módulos a derecha (con $d_M$ morfismos $A$-lineales) y $(N, d_N)$ es un complejo de $A$-módulos a izquierda, muestre que

$$(M \otimes_A N)_n := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} M_p \otimes_A N_{n-p}$$

resulta un complejo (de grupos abelianos) con el diferencial dado por

$$d(x \otimes y) = d_M(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d_N(y)$$

donde $x \in M_p$ e $y \in N_{n-p}$. Muestre que la aplicación

$$H_p(M) \times H_q(N) \to H_{p+q}(M \otimes_A N)$$

dada por

$$([x], [y]) \mapsto [x \otimes_A y]$$

es bilineal y $A$-balanceada y por lo tanto induce un morfismo (natural)

$$\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(M) \otimes_A H_{n-p}(N) \to H_n(M \otimes_A N)$$

5. Sea $f : M \to N$ un morfismo de complejos, muestre que existe una sucesión exacta larga de la forma

$$\cdots \longrightarrow H_n(M) \xrightarrow{f} H_n(N) \longrightarrow H_n(\mathrm{Cono}(f)) \longrightarrow H_{n-1}(M) \xrightarrow{f} H_{n-1}(N) \longrightarrow \cdots$$

6. Consideremos un diagrama de $A$-modulos y morfismos $A$-lineales de la forma

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_n"] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_n \arrow[r, "d_n"] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d_2"] & Q_1 \arrow[r, "d_1"] & Q_0 \arrow[r, "d_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde la fila de abajo es *exacta* (pero los $Q$ no necesariamente proyectivos, y la fila de arriba es un complejo (no necesariamente exacto) donde los $P_i$ son *proyectivos* para todo $i \geq 0$. Muestre que este diagrama se puede completar a un morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_n \arrow[r, "d_n"] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d_2"] & Q_1 \arrow[r, "d_1"] & Q_0 \arrow[r, "d_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

7. Recordemos que dos morfismos $f, g : M_\bullet \to N_\bullet$ (en Chain$(A)$) se dicen homotópicos, y denotaremos $f \sim g$, si existe $h : M \to N$ $A$-lineal con $h(M_n) \subseteq N_{n+1}$ $\forall n$ (recordamos los diferenciales verifican $d(M_n) \subseteq N_{n-1}$) tal que $dh + hd = f - g$.

   *a*) Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   *b*) (compatibilidad con la suma) Si $f, g, f', g' : M \to N$ con $f \sim g$ y $f' \sim g'$, entonces $f + f' \sim g + g'$.

   *c*) (compatibilidad con la composición) Si $f \sim f'$ y $T : N \to W$ y $S : X \to M$ son morfismos de complejos, entonces $TfS \sim Tf'S$. En particular (si $f$ y $g$ son componibles y) si $f \sim f'$ y $g \sim g'$ entonces $fg \sim f'g'$.

   *d*) Si se define $\mathrm{Obj}(\mathcal{H}(A)) = \mathrm{Obj}(\mathrm{Chain}(A))$, pero

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(X_\bullet, Y_\bullet) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}}(X_\bullet, Y_\bullet)/\sim$$

   entonces la composición Chain$(A)$ induce en $\mathcal{H}(A)$ una composición, que hace de $\mathcal{H}(A)$ una categoría. Cualquier funtor $F$ en Chain$(A)$ que verifique $F(f) = F(f')$ para todo par $f, f'$ con $f \sim f'$ (por ejemplo $X_\bullet \mapsto H_n(X_\bullet)$) se factoriza por $\mathcal{H}(A)$.

## 2.1. Significado directo de "$Co(f)$ contráctil"

Supongamos dada $h : Co(f) \to Co(f)$ una homotopía de contracción $h$, es decir, $h$ verfica $\partial h + h\partial = \mathrm{Id}_{Co(f)}$. Recordemos

$$Co(f)_n = N_n \oplus M_{n-1}, \qquad h(Co(f)_n) \subseteq Co(f)_{n+1}$$

$$\partial(x, m) = (dx + fm, -dm)$$

escribamos, para cada $(x, m) \in N_n \oplus M_{n-1}$

$$h(x, 0) = (h_1 x, gx)$$

$$h(0, m) = (\phi m, h_2 m)$$

donde (para cada $n$)

$$h_1 : N_n \to N_{n+1}, \qquad h_2 : M_n \to M_{n+1}, \qquad g : N_n \to M_n, \qquad \phi : M_{n-1} \to N_{n+1}$$

Escribir explícitamente $\partial h + h\partial = \mathrm{Id}_{Co(f)}$ en términos de $h_1$, $h_2$, $g$ y $\phi$ y concluir que $Co(f)$ contráctil equivale a que

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(N, M) : fg \sim \mathrm{Id} \text{ y } gf \sim \mathrm{Id}$$

y $\exists \phi : N \to M$ de grado 2 tal que $fh_2 + h_1 f = d\phi - \phi d$. En particular, $M$ y $N$ deben ser contráctiles (pero con homotopías que verifican una propiedad especial).

Los siguientes ejercicios tienen por objetivo final mostrar que si $M$ y $N$ son contráctiles, vía dos homotpías cualesquiera, entonces $Co(f)$ es contráctil, para cualquier $f : M \to N$.

La presentación está basada el una parte del Chp.3 (2.1 cycle operators, 2.4 Theorem, pp 75-76) del libro *Acyclic Models*, de Michael Barr, AMS, CRM (2017).

## La recíproca

1. Sea $(M_\bullet, d)$ un complejo de $A$-módulos. Observar estas frases y convencerse de su equivalencia:

   *a*) $M_\bullet$ es exacto.

   *b*) para cada $m \in M_\bullet$ tal que $dm = 0$, existe $m'$ con $m = dm'$.

   *c*) Denotemos $Z_\bullet = \{m \in M : dm = 0\}$ los ciclos de $M$. Entonces, existe una forma de hacer corresponder a cada $m \in Z_\bullet$ un $m'$ tal que $dm' = m$.

   *d*) Existe una *función* (no necesariamente morfismo!) $Z_\bullet \to M_\bullet$, que a cada $m \in Z_\bullet$ le asigna $m'$ tal que $dm' = m$.

   *e*) Existe una *función* $z : Z_\bullet \to M_\bullet$ tal que $d \circ z = \mathrm{Id}_M$.

   No es de sorprender que la existencia de un tal $z$ que sea morfismo se traduzca en una propiedad adicional de $M_\bullet$.

   **Definición:** Dado $M_\bullet$ un complejo de $A$-módulos, diremos que admite un **operador acíclico** si existe un **morfismo** $z : Z_\bullet(M) \to M_\bullet$ con $d \circ z = \mathrm{Id}_M$, donde $Z_\bullet(M)$=los ciclos de $M_\bullet$.

   Obs: en inglés se llama "cyclic operator", pero "operador cíclico" se le suele llamar a otra cosa (acción de un grupo cíclico, que quizás veamos mas tarde enel curso), por eso lo llamé acíclico, en vez de cíclico.

2. (fácil) Sea $M_\bullet$ contráctil, spongamos que $h$ es una homotopía tal que $hd+dh = \mathrm{Id}_M$. Muestre que $z := h|_Z : Z_\bullet \to M_\bullet$ es un operador acíclico.

3. (más interesante) Proposición: Si $M_\bullet$ admite un operador acíclico, entonces es contráctil. *Demostración: Sea $z : Z \to M$ tal que $zd = \mathrm{Id}_M$, entonces*

   $$d = d \circ z \circ d$$

   *o bien*

   $$d \circ (\mathrm{Id}_M - z \circ d) = 0$$

   $\Rightarrow$ *la imagen de $\mathrm{Id}_M - z \circ d$ esta contenida en los ciclos, y se puede componer con $z$.*

   *Se define $h : M \to M$ vía*

   $$h := z \circ (\mathrm{Id}_M - z \circ d)$$

   *Observar que la composición anterior tiene sentido, aún cuando "$z - z \circ z \circ d$" no, pues $z \circ z$ (y por lo tanto $z \circ z \circ d$) no esta definido!*

   *Muestre que $h$ sirve de homotopía de contracción.*

4. Sea $f : M_\bullet \to N_\bullet$ un morfismo de complejos y $F : A - Mod \to \mathbb{Z} - Mod$ un funtor aditivo (es decir, $F(X \oplus Y) = F(X) \oplus F(Y)$ y $F(f+f') = F(f)+F(f')$. Si $(M_\bullet, d_M)$ es un complejo que admite un operador acíclico, entonces $(F(M_\bullet), F(d_M))$ tamién.

En particular, para cada $A$-módulo $C$, si $M_\bullet$ admite un operador acíclico, entonces el complejo $\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)$ también, donde

$$\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)_n = \mathrm{Hom}_A(C, M_n)$$

y su diferencial es $d_*$. Concluimos que $\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)$ es necesariamente exacto.

5. (más interesante) Muestre que $M_\bullet$ admite un operador acíclico **si y sólo si** $\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)$ es exacto para todo $A$-módulo $C$.

   *Sugerencia: ver el significado de que* $\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)$ *sea exacto para el caso*

   $$C := Z_{n_0} = \mathrm{Ker}(d : M_{n_0} \to M_{n_0-1}) \subseteq M_{n_0} \subseteq M$$

   *y el elemento* $i$*= la inclusión* $Z_{n_0} \hookrightarrow M_\bullet$*, observar que* $d_*(i) = d \circ i = 0$*, luego* $i \in \mathrm{Hom}_A(Z_{n_0}, M_\bullet)_{n_0}$ *es un ciclo de ese complejo.*

6. Sea $f : M_\bullet \to N_\bullet$ un morfismo de complejos y $F : A - Mod \to \mathbb{Z} - Mod$ un funtor aditivo (es decir, $F(X \oplus Y) = F(X) \oplus F(Y)$ y $F(f + f') = F(f) + F(f')$). Muestre que

   $$F(Co(f)) = Co(F(f))$$

   En particular, para cualquier $A$-módulo $C$,

   $$\mathrm{Hom}_A(C, Co(f)) = Co\Big(f_* : \mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet) \to \mathrm{Hom}_A(C, N_\bullet)\Big)$$

7. Muestre que si $M_\bullet$ y $N_\bullet$ son contráctiles y $f : M_\bullet \to N_\bullet$ es un morfismo cualquiera, entonces $\mathrm{Hom}_A(C, Co(f))$ es exacto para cualquier $A$-módulo $C$ (sugerencia: use la sucesión exacta larga de $Co(f_*)$). Concluya que $Co(f)$ admite un operador acíclico y por lo tanto es necesariamente contráctil. Compare con la primera sección.

## 2.2. Más sobre el Cono

8. Si $M$ es un complejo, entonces $Co(\mathrm{Id}_M)$ es contráctil. En particular, todo complejo se inyecta en un complejo exacto, y es cociente de un exacto. Resulta claro que no puede esperarse que el funtor homología o preserve monomorfismos ni epimorfismos.

9. Si $f\colon M \to N$ es un morfismo de complejos $\Rightarrow Co(f)$ es el push-out de
   $$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"] & N \\ Co(\mathrm{Id}_M) & \end{tikzcd}$$

10. Sea $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ una s.e.c. de complejos de $A$-módulos tal que para cada $n$,

    $$0 \to X_n \to Y_n \to Z_n \to 0$$

    se parte como s.e.c. de $A$-módulos (pero con secciones/retracciones que no necesariamente respetan el diferencial). Muestre que existe $f : \Sigma^{-1}Z \to X$ tal que $Y \cong Co(f)$.

11. (El axioma del octahedro en la categoría de homotopía) Sea $a : X \to Y$ y $b : Y \to Z$ dos morfismos, $ba : X \to Z$ la composición, y consideramos el siguiente diagrama donde las líneas llenas son las standards.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}Co(ba) \arrow[r] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "a"] & X \arrow[d, "ba"] & & \\
\Sigma^{-1}Co(b) \arrow[r] & Y \arrow[r, "b"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & Co(b) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Sigma Y \arrow[d] \\
 & Co(a) \arrow[r, dotted, "\exists f"] \arrow[d] & Co(ab) \arrow[r, dotted, "\exists i"] \arrow[d] & Co(b) \arrow[r, dotted, "\exists \pi"] & \Sigma Co(a) \\
 & \Sigma X \arrow[r, equal] & \Sigma X & &
\end{tikzcd}$$

muestre que existen morfismos "obvios" de complejos $f$, $i$, $\pi$ como en las flechas punteadas tales y que resulta que $Co(b)$ es *homotópico* al cono de $f$
(de hecho, $Co(f) = Co(b) \oplus \Sigma Co(\mathrm{Id}_X)$) y se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd}
Co(a) \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Co(ab) \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & Co(b) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"] & \Sigma Co(a) \arrow[d, equal] \\
Co(a) \arrow[r, "f"] & Co(ab) \arrow[r] & Co(f) \arrow[r, "p"] & \Sigma Co(a)
\end{tikzcd}$$

donde $\phi$ es una equivalencia homotópica, y los cuadrados que involucran $\phi$ conmutan a menos de homotopía.

Hacer el dibujo del octahedro

# 3. Complejos dobles, resoluciones, Tor y Ext

## 3.1. Hacia la s.e.larga de Tor

1. Muestre que si $0 \to M_i \to^{f_i} N_i \to^{g_i} R_i \to 0$ es una s.e.c. de $A$-módulos $\forall i \in I$, entonces

$$0 \to \bigoplus_I M_i \xrightarrow{\oplus_I f_i} \bigoplus_I N_i \xrightarrow{\oplus_I g_i} \bigoplus_I R_i \to 0$$

es una s.e.c. Deduzca que si $0 \to M_{\bullet\bullet} \to^f N_{\bullet\bullet} \to^g R_{\bullet\bullet} \to 0$ se dice una s.e.c. de complejos dobles entonces

$$0 \to Tot(M_{\bullet\bullet}) \to^f Tot(N_{\bullet\bullet}) \to^g Tot(R_{\bullet\bullet}) \to 0$$

es una s.e.c. de complejos usuales.

2. Sea $f : M_\bullet \to N_\bullet$ un morfismo de complejos. Muestre que

$$Co(f) = Tot\left(\begin{tikzcd}
\cdots & M_{n-1} \arrow[l, "-d"'] \arrow[d, "f_{n-1}"] & M_n \arrow[l, "-d"'] \arrow[d, "f_{n-1}"] & M_{n+1} \arrow[l, "-d"'] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \arrow[l] \\
\cdots & N_{n-1} \arrow[l, "d"'] & N_n \arrow[l, "d"'] & N_{n+1} \arrow[l, "d"'] & \arrow[l]
\end{tikzcd}\right)$$

donde la fila de $N$ es la fila 0 y la de $M$ es la fila 1.

3. Considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & & R_n \arrow[r] \arrow[d] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] \arrow[d] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

con columnas exactas y cuyas filas son complejos, Suponiendo que la primera y tercera fila son exactas y que $Q_{n+1}$ es proyectivo, muestre que se puede extender a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & P_{n+1} \oplus Q_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "p"] & R_n \arrow[r] \arrow[d] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & Q_n \arrow[r] \arrow[d] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

de manera que la columna agregada es exacta, y la fila del medio sigue siendo un complejo. Sugerencia: considere el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "i"] & Im(d_P) = \mathrm{Ker}(d_P) \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & P_{n+1} \oplus Q_{n+1} \arrow[d, "p"] & \mathrm{Ker}(d_R) \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed] & R_n \arrow[r] \arrow[d] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, dashed, "?"] & Im(d_Q) = \mathrm{Ker}(d_Q) \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "?"] & Q_n \arrow[r] \arrow[d] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Observación: para ver que la sucesión de los núcleos es exacta se puede utilizar la sucesión exacta larga de homología.

4. Concluya del ejercicio anterior que si $0 \to M \to E \to N \to 0$ es una s.e.c. de $A$-módulos y resolvemos a $M$ y a $N$:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & E \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ se puede completar a un diagrama con columnas exactas y filas complejos:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & R_2 \arrow[r] \arrow[d] & R_1 \arrow[r] \arrow[d] & R_0 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] \arrow[d] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Concluya que necesariamente las columnas (salvo la de M,E,N) se parten y por lo tanto los $R_n$ son proyectivos). Además (usando la s.e.larga) la fila del medio también es exacta.

5. Con las notaciones del ejercicio anterior, muestre que para cualquier $A$-módulo a derecha $X$, la siguiente es una s.e.c. de complejos "filas"

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & X \underset{A}{\otimes} P_2 \arrow[r] \arrow[d] & X \underset{A}{\otimes} P_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \underset{A}{\otimes} P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X \underset{A}{\otimes} R_2 \arrow[r] \arrow[d] & X \underset{A}{\otimes} R_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \underset{A}{\otimes} R_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X \underset{A}{\otimes} Q_2 \arrow[r] \arrow[d] & X \underset{A}{\otimes} Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \underset{A}{\otimes} Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto inducen una s.e.larga

$$\cdots \to Tor_2^A(X,N) \to Tor_1^A(X,M) \to Tor_1^A(X,E) \to Tor_1^A(X,N) \to X \underset{A}{\otimes} M \to X \underset{A}{\otimes} E \to X \underset{A}{\otimes} N \to 0$$

## 3.2. Un poco de resoluciones y levantamientos de morfismos

1. Sobre levantamiento de morfismos cuando se tiene una homotopía de contracción: Consideremos un complejo de $A$-módulos

$$\cdots \rightleftarrows P_n \underset{d}{\overset{h}{\rightleftarrows}} P_{n-1} \rightleftarrows \cdots \overset{h}{\rightleftarrows} P_1 \underset{d}{\overset{h}{\rightleftarrows}} P_0 \underset{\epsilon}{\overset{h}{\rightleftarrows}} M \longrightarrow 0$$

provisto de una homotopía de contracción $h_n : P_n \to P_{n+1}$ (en principio $\mathbb{Z}$-lineal, y por convención $P_{-1} := M$), es decir, $hd + dh = \mathrm{Id}$. En particular es exacto.

Si tenemos un complejo de $A$-módulos libres y un morfismo $A$-lineal $f : N \to M$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{(X_n)} \arrow[r, "\partial"] & A^{(X_{n-1})} \arrow[r, "\partial"] & \cdots \arrow[r] & A^{(X_1)} \arrow[r, "\partial"] & A^{(X_0)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dotted] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, shift left] & P_n \arrow[r, shift left, "d"'] \arrow[l, shift left] & P_{n-1} \arrow[l, shift left, "h"'] \arrow[r, shift left] & \cdots \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & P_1 \arrow[l, shift left, "h"'] \arrow[r, shift left, "d"'] & P_0 \arrow[l, shift left, "h"'] \arrow[r, shift left, "\epsilon"'] & M \arrow[l, shift left, "h"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Se define $f_0 : A^{(X_0)} \to P_0$ como el único morfismo $A$-lineal tal que, si $x \in X_0$,

$$f_0(x) = hf\partial(x)$$

e inductivamente, si se tienen definidas las $f_i$ para $i \leq n$, se define $f$ como la única extensión $A$-lineal tal que $f_n(x) = h(f_{n-1}(x))$ (para todo $x \in X_n$)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{(X_n)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dotted, "f_n"] & A^{(X_{n-1})} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & A^{(X_1)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_1"] & A^{(X_0)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_0"] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, shift left] & P_n \arrow[r, shift left, "d"] \arrow[l, shift left] & P_{n-1} \arrow[r, shift left] \arrow[l, shift left, "h"] & \cdots \arrow[r, shift left] \arrow[l, shift left] & P_1 \arrow[r, shift left, "d"] \arrow[l, shift left, "h"] & P_0 \arrow[r, shift left, "\epsilon"] \arrow[l, shift left, "h"] & M \arrow[r] \arrow[l, shift left, "h"] & 0
\end{tikzcd}$$

Muestre que la familia de morfismos $\{f_n\}_n$ así construida es un morfismo de complejos.

2. Sea $A$ una $k$-álgebra $k$-proyectiva y supongamos dado un complejo *exacto* de la forma
$$\cdots \to A \otimes V_2 \otimes A \xrightarrow{d_2} A \otimes V_1 \otimes A \xrightarrow{d_1} A \otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$$
donde $V_i$ son $k$-módulos libres, $\otimes = \otimes_k$ y todos los morfismos son $A$-lineales a izquierda y a derecha. Muestre que

   *a*) Todas las componentes graduadas de este complejo son proyectivos como $A$-módulos a izquierda, y como $A$-módulos a derecha.

   *b*) Existe una homotopía de contracción $A$-lineal a derecha (y también existe alguna otra que es $A$-lineal a izquierda).

   *c*) Para cualquier $M \in {}_A Mod$, el complejo siguiente es exacto

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A\otimes V_2 \otimes A \underset{A}{\otimes} M \arrow[r, "d_2 \underset{A}{\otimes} \mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\cong"] & A\otimes V_1 \otimes A \underset{A}{\otimes} M \arrow[r, "d_1 \underset{A}{\otimes} \mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\cong"] & A \otimes A \underset{A}{\otimes} M \arrow[r, "m \underset{A}{\otimes} \mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\cong"] & A \underset{A}{\otimes} M \to 0 \arrow[d, "\cong"] \\
\cdots \arrow[r] & A\otimes V_2 \otimes M \arrow[r, "\widetilde{d}_2"] & A \otimes V_1 \otimes M \arrow[r, "\widetilde{d}_1"] & A \otimes M \arrow[r, "\rho_M"] & M \to 0
\end{tikzcd}$$

   *d*) Si $M$ es $k$-proyectivo, entonces la anterior es una resolución $A$-proyectiva de $M$ (y funtorial en $M$).

3. Observar que $k[x] \otimes k[x] \cong k[x, y]$ y que $k[x, y]/(x - y) \cong k[x]$. Muestre que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to k[x] \otimes k[x] \xrightarrow{d} k[x] \otimes k[x] \xrightarrow{m} k[x] \to 0$$

donde $d(p \otimes q) = xp \otimes q - p \otimes xq$. Concluya que para todo $k[x]$-módulo que sea $k$-proyectivo, la siguiente es una resolución $k[x]$-proyectiva de $M$:

$$0 \to k[x] \otimes M \xrightarrow{\partial} k[x] \otimes M \xrightarrow{\rho} M \to 0$$

donde $\partial(p \otimes m) = xp \otimes m - p \otimes xm$.

4. (* Más adelante veremos una generalización *) Sea $A = \mathbb{Z}[M^+(X)]$ el anillo libre en un conjunto $X$ (ver el apunte grupal para la definición). La siguiente es una sucesión exacta:
$$0 \to A \otimes k^{(X)} \otimes A \xrightarrow{d} A \otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$$
donde $d(a \otimes x \otimes b) = ax \otimes b - a \otimes xb$.

## 3.3. Resoluciones, cálculo de Tor y Ext

1. Sea $k$ un anillo comutativo, consideramos $A = k[x]/x^2$. Muestre que
$$\cdots A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{\epsilon} k \to 0$$
es exacta, donde $\epsilon(\lambda + \mu x) = \lambda$. Encuentre una homotopía $k$-lineal de contraccion. Deduzca que para todo $n \geq 1$, $\mathrm{Tor}_n^A(k, M) \cong \{m \in M : xm = 0\}/xM$, en particular, $\mathrm{Tor}_n^A(k, k) = k$ para todo $n \geq 1$.

2. Sea $A = k[x]$ con $k$ un cuerpo. Sabiendo que
$$0 \to k[x] \otimes_k M \to^d k[x] \otimes_k M \to^\epsilon M \to 0$$
(con $d(p(x) \otimes m) = p(x) \otimes xm$ y $\epsilon(q(x) \otimes m) = q(x) \cdot m$) es exacta, describa $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ en términos de $M$ y $N$ para todo $n$.

3. Muestre que $\mathrm{Tor}_n^A(\oplus_i M_i, N) \cong \oplus_i \mathrm{Tor}_n^A(M_i, N)$, y lo mismo para la otra variable.

4. Sea $n > 1$ y $A = k[x]/(x^n - 1)$. Notar que $A \cong k[C_n]$ con $C_n$=grupo cíclico de orden $n$. Consideramos $M = k$ con la estructura de $A$-módulo dada por $x \cdot \lambda = \lambda$.

   *a*) Muestre que si $M$ es un $k$-módulo con un automorfismo $k$-lineal $g$ de orden $n$, entonces es un $A$-módulo via $x \cdot m := g(m)$ y que
   $$M_g = k \otimes_A M$$

   *b*) Muestre que si $N = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$, entonces
   $$\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{1-x} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{1-x} A \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0$$
   provee de una resolución proyectiva de $k$ como $A$-módulo (aquí $\epsilon(p(x)) = p(1)$). Concluya que $\mathrm{Tor}_n^A(k, M) \cong \mathrm{Tor}_{n+2}^A(k, M)$ para todo $n \geq 1$. Describa lo más explícitamente posible $\mathrm{Tor}_1$ y $\mathrm{Tor}_2$.

   *c*) Si $n$ es inversible en $k$, muestre que $k$ es isomorfo a un sumando directo de $A$ (como $A$-módulo), concluya que en ese caso $\mathrm{Tor}_n^A(k, M) = 0$ para todo $n > 0$.

   *d*) Si la multiplicación por $n$ no es necesariamente inversible en $k$, pero en $M$ SI, muestre que $\mathrm{Tor}_n^A(k, M) = 0$ para todo $n > 0$.

5. Sea $A = k[x, y]$ y consideramos $k$ como $A$-módulo via $p(x, y) \cdot \lambda := p(0, 0)\lambda$. Utilice el ejercicio 9 de la práctica 3 para mostrar que
$$\mathrm{Tor}_n^A(k, M) = 0 \ \forall n \geq 3$$
Describa lo más explícitamete posible $\mathrm{Tor}_1^A(k, M)$ y $\mathrm{Tor}_2^A(k, M)$.

6. Sea $0 \to X \to Y \to Z$ una s.e.c. de $A$-módulos. Muestre que si $X$ y $Z$ son playos, entonces $Y$ es playo. También si $Y$ y $Z$ son playos, entonces $X$ es playo.

7. Sea $A$ un dominio íntegro. Muestre que si $M$ es playo entonces $M$ no tiene torsión.

8. Sea $A$ un anillo conmutativo. Si $M$ y $N$ son dos $A$-módulos a izquierda, los consideramos como $A$-bimódulos de manera simétrica (i.e. $ma = am$, etc). Muestre que $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ es naturalmente un $A$-módulo (simétrico).

9. Sea $A$ un anillo conmutativo y $S$ un subconjunto multiplicativo. Muestre que, para todo par de $A$-módulos $M$, $N$ hay isomorfismos naturales

$$\mathrm{Tor}_\bullet^A(M, N)_S = \mathrm{Tor}_\bullet^A(M_S, N_S) = \mathrm{Tor}_\bullet^A(M_S, N) = \mathrm{Tor}_\bullet^A(M, N_S) = \mathrm{Tor}_\bullet^{A_S}(M_S, N_S)$$

# Más sobre Tor

1. Sea $A$ un anillo integro, $x \in A$ no nulo. Muestre que

$$\mathrm{Tor}_n^A(A/(x), M) = 0 \ \forall n \geq 2$$

Describa lo mas explicitamente posible $\mathrm{Tor}_n^A(A/(x), A/(y))$, donde $y \in A$ (y $n \in \mathbb{N}$).

2. Muestre que $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{(n:m)}$.

3. (Cambio de base playo) Sea $A \to B$ un morfismo de anillos tal que $B$ es $A$-playo como $A$-modulo a iquierda. Si $W$ es un $B$-modulo (y por lo tanto, via el morfismo $A \to B$ es un $A$-modulo, muestre que

$$\mathrm{Tor}_n^B(M \otimes_A B, W) = \mathrm{Tor}_n^A(M, W)$$

compare con el último ejercicio de la guía 5.

4. Sea $A = k[\mathbb{Z}]$, observar que $A \cong k[x]_S$, donde $S = \{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$. Describa lo más explicitamebnte posible $\mathrm{Tor}_n^{k[\mathbb{Z}]}(M, N)$, donde $M$ y $N$ son $k[\mathbb{Z}]$-módulos cualesquiera.

5. Sea $A$ integro y $0 \neq x \in A$, muestre que el complejo

$$X = (\cdots 0 \to A \xrightarrow{x} A \to 0 \cdots)$$

verifica $Z(X)_n$ y $B(X)_n$ proyectivo para todo $n$, luego, se puede utilizar la fórmula de Künneth para este complejo. Dice ésto algo nuevo con respecto al ejercicio 1?

## 3.4. Cálculo de Ext

1. Utilizando simplemente la (buena) definición de $\mathrm{Ext}_A^n(M, N) = H_n(\mathrm{Hom}_A(P(M)_\bullet, N), d^*)$, donde $(P(M)_\bullet, d)$ es *alguna* resolución proyectiva de $M$, muestre que

   *a)* $P$ es proyectivo si y sólo si $\mathrm{Ext}_A^n(P, N) = 0$ para todo $n > 0$ y para todo $N$,

   *b)* $I$ es inyectivo si y sólo si $\mathrm{Ext}_A^n(M, I) = 0$ para todo $n > 0$ y para todo $M$.

2. Si $A$ es dominio principal, entonces $\mathrm{Ext}_A^n(M,N) = 0$ si $n \geq 2$.

3. Sea $A$ un anillo. Muestre que son equivalentes

   - Cocientes de inyectivos son inyectivos.
   - Submódulos de proyectivos son proyectivos.
   - $\mathrm{Ext}_A^n(M,N) = 0$ si $n \geq 2$ para todo $M$, $N$.

4. Muestre que $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{(m:n)}$

5. Calcule $\mathrm{Ext}_{k[x]}^1(k,k)$. Es cierto que $\mathrm{Ext}_{k[x]}^1(k[x]/(f), k[x]/(g)) \cong k[x]/(f,g)$?

6. Sea $A = k[x]$, $M, N$ son $A$-modulos donde $M$ es $k$-proyectivo. Utilizando la resolución
$$0 \to A \otimes_k M \xrightarrow{d} A \otimes_k M \to M \to 0$$
donde $d(a \otimes m) = xa \otimes m - a \otimes xm$. Describa lo más explícitamente posible $\mathrm{Ext}_A^n(M,N)$.

7. Sea $k$ un cuerpo, $V$ un $k$-espacio vectorial y $A = TV$, el álgebra tensorial. Si $M$ es un $TV$-módulo, muestre que el complejo
$$0 \to TV \otimes V \otimes M \xrightarrow{d} TV \otimes M \xrightarrow{\rho} M \to 0$$
es exacto, donde las flechas están definidas por $d(w \otimes v \otimes m) = wv \otimes m - w \otimes vm$, $\rho(w \otimes m) = wm$ ($w \in TV$, $v \in V$, $m \in M$). Concluya que $\mathrm{Ext}_A^n(M,N) = 0$ si $n \geq 2$.

8. Concluya del ejercicio anterior que cocientes de $TV$-inyectivos son $TV$-inyectivos.

9. Utilice la resolución del ejercico 12 de la práctica 3 (donde se resuelve a $k$ como $k[x,y]$-modulo) para calcular $\mathrm{Ext}_{k[x,y]}^n(k,k)$ para todo $n$.

10. Sea $G = C_n = \langle g : g^n = 1 \rangle$ el grupo cíclico de orden $n$. Calcule $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^k(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Si $M$ es un $\mathbb{Z}[G]$-módulo, describa lo más explícitamente posible $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^k(\mathbb{Z}, M)$, y en particular $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^2(\mathbb{Z}, M)$.

11. Sea $G = C_n \times C_m$. Tensorizando una resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[C_n]$ y otra resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[C_m]$ (y la fórmula de Künneth) encuentre una resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$. Utilícela para describir $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^1(\mathbb{Z}, M)$ y $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^2(\mathbb{Z}, M)$, donde $M$ es un $k[G]$-modulo.

12. Sea $H$ un subgrupo normal de un grupo $E$ y $G = E/H$. Muestre que si $H \subseteq Z(E)$, entonces la acción de $G$ en $H$ inducida por la sucesión exacta corta
$$1 \to H \to E \to G \to$$
es la acción trivial.

13. Calcule $H^2(G, \mathbb{Z}_p) = \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^2(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$ para $G = C_p$ (el grupo ciclico de orden $p$), $C_{p^2}$, y $C_p \times C_p$.

14. Sea $E$ un grupo de orden $p^3$. Muestre que existe una sucesión exacta del tipo

$$1 \to C_p \to E \to G \to 1$$

donde $C_p \subseteq Z(E)$. Utilice el cálculo de $H^2$ del ejercicio anterior para determinar todos los grupos de orden $p^3$.

15. Sean

$$(E) = (0 \to X \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \xrightarrow{\epsilon} Y \to 0)$$
$$(F) = (0 \to Y \xrightarrow{\eta} F_1 \to F_2 \to \cdots \to F_m \to Z \to 0)$$

dos extensiones (de $(Y, X)$ y de $(Z, Y)$, de grado $n$ y $m$ respectivamente), muestre que

$$0 \to X \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \xrightarrow{\eta\epsilon} F_1 \to F_2 \to \cdots \to F_m \to Z \to 0$$

es una extensiones de grado $n+m$, y que esto dota al conjunto de las extensiones de un producto asociativo; este producto está bien definido en la clase de equivalencia de extensiones.

16. (Lema de Shapiro) Sea $H$ un subgrupo de $G$, y $N$ un $\mathbb{Z}[H]$-módulo, entonces

$$H_*(G, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} N) \cong H_*(H, N)$$

$$H_*(G, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], N)) \cong H_*(H, N)$$

mostrar que si $[H : G] < \infty$, entonces

$$\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} N \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], N)$$

como $\mathbb{Z}[G]$-modulo, con un isomorfismo natural en $N$.

17. Sean $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Bajo la hipotesis que $B$ sea $A$-playo, o $A$-proyectivo, generalice el lema de Shapiro.

## 3.5. Resoluciones funtoriales

1. Sea $M$ un $A$-módulo, se define $P(M) = A^{(M)}$ y $p_M : A^{(M)} \to M$ vía

$$\sum_{m \in M} a_m e_m \mapsto \sum_{m \in M} a_m m$$

Se define $Z_0(M) := \mathrm{Ker} p_M$, $P_1(M) := A^{(Z_0)}$ y $d_1 : P_1(M) \to P_0(M)$ como la composición

$$P_1(M) = A^{(Z_0)} \to Z_0(M) = \mathrm{Ker}(p_M) \hookrightarrow P_0(M)$$

y así continuamos, $Z_1(M) = \mathrm{Ker}(d_1)$, $d_2 : P_2(M) = A^{(Z_1)} \to Z_1 \hookrightarrow P_1(M)$ etc. Muestre que

$$\cdots \to P_n(M) \to \cdots \to P_1(M) \to P_0(M) \to M \to 0$$

es una resolución libre y por lo tanto proyectiva de $M$. Además, todos los $P_i(M)$ son funtoriales en $M$ y los $d_i$ son transformaciones naturales. En otras palabras, esta resolución es funtorial en $M$, como funtor de $A$-Mod en Chain$(A)$.

2. Sea $A$ un anillo con $gldim(A) = d < \infty$, y para cada $M \in A$-mod, sea

$$\cdots \to P_n(M) \to \cdots \to P_1(M) \to P_0(M) \to M \to 0$$

la resolución del ejercicio anterior. Muestre que la resolución

$$0 \to K_d \to P_{d-1}(M) \to P_{d-2}(M) \to \cdots \to P_1(M) \to P_0(M) \to M \to 0$$

(donde $K_d = \mathrm{Ker}(P_{d-1} \to P_{d-2})$) es una resolución proyectiva y también funtorial.

## 3.6. Resolucion standard

$$\cdots \to A^{\otimes n+1} \to \cdots \to A^{\otimes 3} \to A^{\otimes 2} \to A \to 0$$

Sea $A$ una $k$-álgebra. Definimos

$$B_n(A) := A^{\otimes n+1}$$

con diferencial

$$b'(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n - a_0 \otimes a_1a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \pm$$

$$\pm \cdots + (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_ia_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n + \cdots + (-1)^{n-1} a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}a_n$$

En grados bajos:

$$b'(a \otimes b \otimes c) = ab \otimes c - a \otimes bc$$
$$b'(a \otimes b) = ab = m(a \otimes b)$$

1. Sea $s : A^{\otimes n} \to A^{\otimes n+1}$ $k$-lineal dada por

$$s(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) := 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n$$

Calcular $sb' + b's$ y concluya que $(B_\bullet(A), b')$ es exacta.

2. Sea $M$ un $A$-bimódulo (en particular $M$ es un $k$-bimódulo) y sea $V$ un $k$-bimódulo. Muestre que hay un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{A-bimod}(A \otimes_k V \otimes_k A, M) \cong \mathrm{Hom}_{k-bimod}(V, M)$$

Concluya que si $V$ es proyectivo como $k$-bimódulo, entonces $A \otimes V \otimes A$ es proyectivo como $A$-bimódulo.

3. Un $A$-bimódulo $M$ se dice $k$-simétrico si

$$\lambda \cdot m = m \cdot \lambda \ \forall m \in M, \ \lambda \in k$$

Muestre que la categoría de $A$-bimódulos simétricos se identifica con la categoría de $A \otimes A^{op}$-módulos a izquierda (o a derecha) vía

$$(a \otimes a') \cdot m = ama' = m \cdot (a' \otimes a)$$

Notación: $A^e := A \otimes A^{op}$

4. Concluya que $(B_\bullet(A), b')$ provee de una resolución de $A$ como $A$-bimódulo $k$-simétrico.

**Definición:** Si $M$ es un $A$-bimódulo $k$-simétrico se define

$$H_\bullet(A, M) = \mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A, M)$$

(en la notación se sobreentiende $k$, si hace fata se denota $H_\bullet(A; k, M)$)

$$H^\bullet(A, M) = \mathrm{Ext}_{A^e}^\bullet(A, M)$$

se llama la homología y cohomología de Hochshild de $A$ a coeficientes en $M$

5. $H^0(A, M) \cong M^A := \{m \in M : am = ma \ \forall a \in A\}$.

6. $H^1(A, M) = \mathrm{Der}_k(A, M)/Innder(A, M)$, donde $\mathrm{Der}_k(A, M) = \{D : A \to M$ $k$-lineal$/D(ab) = aD(b) + D(a)b \forall a, b \in A\}$, $Innder = \{D : \exists m_0 \in M/D(a) = am_0 - m_0 a\}$

## 3.7. Localización en CO-homología

**Definición:** un $A$-módulo $M$ se dice **finitamente presentado** si existe una sucesión exacta del tipo

$$A^m \xrightarrow{p_2} A^n \xrightarrow{p_1} M \longrightarrow 0$$

(con $n, m \in \mathbb{N}$)

1. Si $M$ es finitamente presentado y $N$ arbitrario $\Rightarrow \exists$ una s.exacta de la forma

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to N^n \to N^m$$

2. Muestre que $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es un $Z(A)$-módulo vía

$$(a \cdot f)(m) := af(m) \quad (= f(am))$$

**Observación:** Si $S \subset A$ es un subconjunto central y multiplicativamente cerrado, existe una flecha natural (el funtor localización)

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N_S)$$

$$f \mapsto \widetilde{f} = \left(\frac{m}{s} \mapsto \frac{f(m)}{s}\right)$$

que es un morfismo de $Z(A)$-módulos, en donde a la derecha, la acción de $S$ es claramente biyectiva, por lo tanto induce un morfismo

$$\mathrm{Hom}_A(M, N)_S \to \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N_S)$$

3. Muestre que si $M$ es finitamente presentado, entonces el morfismo anterior es un iso. (Sugerencia: utilice el hecho de que la localización preserva monomorfismos, el ejercicio 1, y la propiedad universal del núcleo.)

4. Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de $A$-módulos donde $C_n$ es finitamente presentado para todo $n$. Muestre que para todo $A$-módulo $N$,

$$H^\bullet(\mathrm{Hom}_A(C_\bullet, N), d^*)_S \cong H^\bullet(\mathrm{Hom}_{A_S}(C_{S\bullet}, N_S), d^*)$$

5. Sea $A$ un anillo, $M$ y $N$ dos $A$-módulos. Muestre que $\mathrm{Ext}^\bullet_A(M,N)$ es un $Z(A)$-módulo. Si $S \subset A$ es un subconjunto central y multipliativamente cerrado, entonces siempre existe un morfismo natural

$$\mathrm{Ext}^\bullet_A(M,N)_S \to \mathrm{Ext}_{A_S}(M_S, N_S)$$

Muestre que si $A$ es un *anillo noetheriano* y $M$ es *finitamente generado*, entonces $M$ admite una resolución proyectiva donde cada proyectivo es finitamente generado (y por lo tanto finitamente presentado), concluya que en ese caso, para cualqueir $N$ se tiene

$$\mathrm{Ext}^\bullet_A(M,N)_S \cong \mathrm{Ext}_{A_S}(M_S, N_S)$$

6. Sea $A$ una $k$-álgebra tal que $A^e$ es noetheriano. Muestre que $A$ admite una resolución $A^e$-proyectiva

$$\cdots P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

donde cada $P_n$ es finitamente presentado.

7. Si $S \subset A$ es un subconjunto central y multiplicativo, considere $S^e \subset A^e$ el subconjunto multiplicativo generado por $S \otimes \{1\} \cup \{1\} \otimes S$, o sea, $\{s \otimes t : s, t \in S\}$. Muestre que para cada $A$-bimódulo $M$,

$${}_SM_S = A_S \otimes_A M \otimes_A A_S = M_{S^e}$$

Muestre que $H^\bullet(A,M)$ es un $Z(A)$-bimódulo (de hecho, es un $Z(A)$-módulo simétrico), y que y que si $A$ admite una resolución $A^e$-proyectiva $P_\bullet \to A$ donde cada $P_n$ es finitamente $A^e$-presentado, entonces

$$H^\bullet(A,M)_{S^e} \cong H^\bullet(A_S, {}_SM_S) \cong H^\bullet(A, {}_SM_S)$$

Sugerencia: muestre que si $P_\bullet \to A$ es una resolución como $A$-bimódulo, entonces

$$A_S \otimes_A P_\bullet \otimes_A A_S \to A_S \otimes_A A \otimes_A A_S$$

es exacto, y por lo tanto se tiene una resolución $A^e_S$-proyectiva de $A_S \underset{A}{\otimes} A \underset{A}{\otimes} A_S \cong A_S$.

8. Sea $k$ un cuerpo y $A = k(x_1, \ldots, x_n) = Frac(k[x_1, \ldots, x_n])$ el cuerpo de fracciones de polinomios en $n$ variables. Muestre que $pdim_{A^e}(A) = n$ (y por otra parte $gldim(A) = 0$ pues es un cuerpo). O sea, $HH$ detecta grado de trascendencia.

# 4. Dimensión homológica

1. Si $L$ es $A^e$-libre, digamos $L \cong (A^e)^{(I)}$ para un conjunto $I$, denotemos $V = k^{(I)}$, entonces
$$L \cong A^e \otimes_k V \cong A \otimes V \otimes A$$
donde en $A^e$ se toma la estructura usual de $A^e$-módulo a izquierda, y en $A \otimes V \otimes A$ se toma la estructura de bimódulo "exterior", específicamente
$$(a \otimes a') \cdot (a_1 \otimes v \otimes a_2) = aa_1 \otimes v \otimes a_2 a'$$

2. Si $L$ es $A^e$ libre, lo vemos como $A$-bimódulo ($k$-simétrico), entonces para cualquier $A$-módulo a izquierda $M$, $L \otimes_A M$ es un $A$-módulo a izquierda libre. Si $L \cong A^e \otimes V$ y lo vemos como $A$-bimódulo entonces $L \otimes_A M \cong A \otimes (V \otimes M)$. Concluir que si $P$ es $A^e$-proyectivo entonces $P \otimes_A M$ es proyectivo como $A$-módulo a izquierda.

3. Muestre que si $P_\bullet \to A$ es una resolución de $A$ como $A^e$-módulo entonces es contráctil como resolución de $A$-modulos a derecha, y por lo tanto al tensorizar $- \otimes_A M$ sigue exacta y $P_\bullet \otimes_A M$ resulta una resolución de $M$. (De paso, es una resolución funtorial en $M$.)

4. Muestre que si $k$ es un cuerpo, si $A = TV$ (el álgebra tensorial), $A = kQ$ (el álgebra de caminos de un quiver), son álgebras de dimensón global 1.

5. Sea $Q$ un quiver sin ciclos orientados (y por lo tanto $kQ$ es de dimensión finita) y sea $I$ el ideal bilátero generado por $Q_1$. Utilice la resolución conocida (si no la conoce, deje este ejercicio y vaya a conocerla) para mostrar que $A = kQ/I^2$ tiene dimensión global finita, igual a la longitud del camino más largo posible en $Q$. Para el quiver
$$1 \to 2 \to \cdots \to n$$
el álgebra $kQ/I^2$ tiene dimensión global $n$.

6. Sea $k$ un cuerpo y consideramos $A = k(x)$=el cuerpo de fracciones de $k[x]$. Muestre que $\mathrm{Der}_k(k(x), k(x)) \neq 0$, luego $0 \neq HH^1(A, A) = \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, A)$ y por lo tanto $pdim_{A^e}(A) \geq 1$ (de hecho, es igual a 1). Sin embargo $gldim(A) = 0$ pues $A$ es un cuerpo, lo que muestra que la desigualdad $gldim(A) \leq pdim_{A^e}(A)$ puede ser estricta.

## 4.1. Más sobre resoluciones

1. Sea $A = A_1 \times A_2$ el producto cartesiano de anillos (con producto coordenada a coordenada). Muestre que todo módulo $M$ es canónicamente isomorfo a $M = M_1 \times M_2$ donde $M_i$ es un $A_i$-módulo; $M$ es proyectivo como $A$-módulo si y sólo si $M_i$ lo es como $A_i$-módulo. Más aún, si $N$ es otro $A$-módulo, entonces
$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{A_1}(M_1, N_1) \times \mathrm{Hom}_{A_2}(M_2, N_2)$$
Si $P^1_\bullet$ es una resolución de $M_1$ y $P^2_\bullet$ es una resolución de $M_2$, entonces
$$P_n = P^1_n \times P^2_n$$
con diferencial coordenada a coordenada es una resolución de $M_1 \times M_2$.

2. Sea $k$ un anillo conmutativo y $A$ y $B$ dos $k$-algebras (podría ser $k=\mathbb{Z}$).

   *a*) Si $M$ es un $A$-módulo y $N$ un $B$-módulo, muestre que $M\otimes_k N$ es un $A\otimes_k B$-módulo de manera natural.

   *b*) Si $L$ es $A$-libre y $F$ es $B$-libre entonces $L\otimes F$ es $A\otimes B$-libre. Deduzca que si si $P$ es $A$-proyectivo y $Q$ es $B$-proyectivo entonces $P\otimes Q$ es $A\otimes B$-proyectivo.

   *c*) Si $P_\bullet\to M$ y $Q_\bullet\to N$ son dos resoluciones y $k$ es un cuerpo entonces $P^1_\bullet\otimes P^2_\bullet$ (el producto tensorial de los complejos) es una resolución $A$-proyectiva de $M\otimes N$. Muestre que si ($k$ es cuerpo y) $M, M'$ son $A$-módulos a derecha e izquierda respectivamente y $N, N'$ son $B$-módulos a izq y derecha resp. entonces

   $$\mathrm{Tor}^\bullet_{A\otimes B}(M\otimes N, M'\otimes N')=\mathrm{Tor}^\bullet_A(M,M')\otimes\mathrm{Tor}^\bullet_B(N,N')$$

   *d*) Muestre que si $P$ es $A$-proyectivo de tipo finito, $Q$ un $B$-modulo proyectivo de tipo finito, entonces el morfismo natural

   $$\mathrm{Hom}_A(P,M)\otimes_k\mathrm{Hom}_B(Q,N)\to\mathrm{Hom}_{A\otimes_k B}(P\otimes_k Q, M\otimes_k N)$$

   es un isomorfismo.

   *e*) Supongamos que $M$ y $N$ admiten resoluciones proyectivas tal que en cada grado los proyectivos son finitamente generados (por ejemplo si $M$ y $N$ son finitamente generados y $A$ y $B$ son anillos noetherianos) Suponiendo que $k$ es cuerpo, muestre que

   $$\mathrm{Ext}^n_{A\otimes B}(M\otimes_k N, U\otimes V)\cong\bigoplus_{p=0}^{n}\mathrm{Ext}^p_A(M,U)\otimes\mathrm{Ext}^{n-p}_B(N,V)$$

   para todo $A$-módulo $U$ y $B$-módulo $V$.

   *f*) Sean $A$ y $B$ dos $k$-algebras aumentadas, es decir, se tienen dados morfismos de álgebras $\epsilon: A\to k$ y $\eta: B\to k$. Supongamos que $A$ es Noetheriana, $k$-libre, y $k$ un dominio principal (e.g. $\mathbb{Z}$, o un cuerpo), muestre que

   $$\mathrm{Ext}^\bullet_{A\otimes_k B}(k,k)\cong\mathrm{Ext}^\bullet_A(k,k)\otimes_k\mathrm{Ext}^\bullet_B(k,k)$$

   *g*) Explicite los cálculos de Tor y Ext para

      1) $k[x,y]\cong k[x]\otimes k[y]=A\otimes B$ con $M=M'=N=N'=k$,
      2) $k[x,y]/(x^2,y^2)\cong(k[x]/(x^2))\otimes(k[y]/(y^2))$, con $M=M'=N=N'=k$

3. Sea $F_n$ el grupo libre con $n$ generadores $x_1,\dots,x_n$ y $k$ un anillo conmutativo. Muestre que la aplicación $k[F_n]$-lineal determinada por

$$\bigoplus_{i=1}^{n}k[F_n]e_i\to k[F_n]$$

$$e_i\mapsto x_i-1$$

es inyectiva (comparar con el ejercicio 6 de la 2da parte de la practica 6). Concluya que

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} k[F_n]e_i \to k[F_n] \to^{\epsilon} k$$

donde $\epsilon(g) = 1$ para todo $g \in F_n$, es una resolución libre de $k$ como $k[F_n]$-modulo. En particular $H^k(F_n, M) = H_k(F_n, M) = 0$ para todo $k > 1$ y para todo $k[F_n]$-modulo $M$.

4. Sean

$$(E) = (0 \to X \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \xrightarrow{\epsilon} Y \to 0)$$
$$(F) = (0 \to Y \xrightarrow{\eta} F_1 \to F_2 \to \cdots \to F_m \to Z \to 0)$$

dos extensiones (de $(Y, X)$ y de $(Z, Y)$, de grado $n$ y $m$ respectivamente), muestre que

$$0 \to X \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \xrightarrow{\eta\epsilon} F_1 \to F_2 \to \cdots \to F_m \to Z \to 0$$

es una extensiones de grado $n+m$, y que esto dota al conjunto de las extensiones de un producto asociativo: este producto está bien definido en la clase de equivalencia de extensiones.

5. Sea $k$ un cuerpo y $A = kQ$, $K = kQ_0$ donde $Q = (Q_1, Q_0)$ es un quiver con $Q_0$ finito.

   *a*) Si $V$ es un $kQ_0$-Mod a izquierda entonces $A \otimes_{kQ_0} V$ es $A$ proyectivo, además es un sumando directo de $A \otimes V$ (que es $A$-libre).

   *b*) Si $V$ es un $kQ_0$ bimódulo (por ejemplo $kQ_1$), entonces $A \otimes_{kQ_0} V \otimes_{kQ_0} A$ es un sumando directo de $A \otimes V \otimes A$, en particular, es proyectivo en la categoría de $A$-bimódulos $k$-simétricos.

   *c*) Muestre que

   $$0 \to A \otimes_{kQ_0} kQ_1 \otimes_{kQ_0} A \to A \otimes_{kQ_0} A \to A \to 0$$

   provee de una resolución de $A$ como bimódulo $k$-simétrico y por lo tanto, para cualquier $M \in A$-Mod,

   $$0 \to A \otimes_{kQ_0} kQ_1 \otimes_{kQ_0} M \to A \otimes_{kQ_0} M \to M \to 0$$

   da una resolución $A$-proyectiva de $M$. Concluya que $kQ$ es hereditario (i.e. submódulo de un proyectivo es proyectivo).

   *d*) Notar que $kQ$ es graduada (por la longitud de los caminos), por lo tanto $kQ_0$ no sólo es subálgebra sino que se tiene un morfismo de álgebras $kQ \to kQ_0$ (que manda $Q_1$ cero). Utilizar la resolución anterior para dar una descripción general de $\mathrm{Tor}_1^{kQ}(kQ_0, kQ_0)$.

   *e*) Explicitar todo lo anterior para el quiver con un único punto y una única flecha (un loop), para un solo punto y varias flechas, para dos puntos y una flecha de uno en otro, para dos puntos y varias flechas.

*f*) (*) Sea $A = kQ/I$ donde $Q$ es un quiver e $I$ es el ideal generado por $PQ_2$=los caminos de longitud 2. Muestre que

$$\cdots \to A\otimes_{kQ_0}kQ_n\otimes_{kQ_0} \to \cdots \to A\otimes_{kQ_0}kQ_2\otimes_{kQ_0} \to A\otimes_{kQ_0}kQ_1\otimes_{kQ_0} \to A\otimes_{kQ_0}A \to A \to 0$$

donde el diferencial está dado por

$$A \otimes_{kQ_0} kQ_n\otimes_{kQ_0} \to A \otimes_{kQ_0} kQ_{n-1}\otimes_{kQ_0}$$

$$1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_n \otimes 1 \mapsto \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_n \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \otimes \alpha_n$$

y el úlltimo diferencial es la multiplicación.

*g*) Explicitar la resolución anterior para

1) $k[x]/(x^2)$ visto como álgebra de quiver con un solo loop.
2) $k \oplus V$ con $V$ un ideal con producto nulo. (un solo punto y tantos loops como $\dim_k V$)
3) $Q$ cada uno de los quivers

$$1 \to 2$$

$$1 \to 2 \to 3$$

$$1 \to 2 \to 3 \to 4$$

# 5. Cohomología de grupos

1. Tensorizar la resolución standard de $k[G]$ como $k[G]$-bimódulo a derecha por $-\otimes_{k[G]} k$ (donde $k$ es el $G$-módulo trivial) y describir el diferencial.

2. Deducir la fórmula del diferencial que calcula la cohomología de grupo vía el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{k[G]}(B_n, M) = \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G] \otimes k[G]^{\otimes n}, M) \cong Func(G^n, M)$$

3. Sean $M$ y $N$ dos $A$-módulos izquierda, entonces

$$\mathrm{Hom}_k(M, N) \in {}_A Mod_A$$

via

$$(a \cdot f \cdot a')(m) := af(a'm)$$

si $P$ es un $A$-bimódulo, entonces

$$\mathrm{Hom}_{A-bimod}(P, \mathrm{Hom}_k(M, N)) \cong \mathrm{Hom}_A(P \otimes_A M, N)$$

Sea $A$ una $k$-álgebra sobre un cuerpo, $M$ y $N$ dos $A$-módulos a izquierda y consideramos $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ como $A$-bimódulo como antes. Muestre que

$$H^\bullet(A, \mathrm{Hom}_k(M, N)) = \mathrm{Ext}^\bullet_A(M, N)$$

En particular, para $A = k[G]$ y $M = k$ con acción trivial, se tiene que $\mathrm{Hom}_k(k, N) \cong N$ como $G$-módulo a izquierda y tiene acción trivil a derecha, lo que denotamos por $N_\epsilon$. Luego la cohomología d eHochschild y la de grupo están ligadas por

$$H^\bullet(k[G], N_\epsilon) \cong H^\bullet(G, N)$$

## 5.1. $H^2(G,M)$ y extensiones abelianas

Consideraremos

$$0 \to M \to E \to G \to 1$$

una extensión de grupos con $M$ abeliano. Es decir, $M$ es un grupo abeliano, subgrupo invariante de un grupo mas grande $E$, y $E/M \cong G$.

1. Completar las demostraciones de los Lemas/Ejercicios 1,2,3,4 de la teórica.

2. La acción de $G$ en $M$ es trivial si y sólo si $M$ es central en $E$.

3. $E$ un grupo con $|E| = p^n$ y $n$ primo, muestre que $E$ sucede en una extensión de la forma

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to E \to G \to 1$$

   con $\mathbb{Z}_p$ *central* en $E$, por lo tanto $E$ está determinado por un grupo $G$ de orden $p^{n-1}$ y un 2-cociclo $[f] \in H^2(G, \mathbb{Z}_p)$ donde en $\mathbb{Z}_p$ la acción de $G$ es trivial.

4. Sea $G = \mathbb{Z}^n$, notar $k[\mathbb{Z}^n] \cong k[t_1^{\pm 1} \cdots, k[t_n^{\pm 1}]$ es una localización del anillo de polinomios. Muestre que el complejo de Koszul

$$0 \to k[t_1, \cdots, t_n] \otimes \Lambda^n V \to \cdots \to k[t_1, \cdots, t_n] \otimes \Lambda^2 V \to k[t_1, \cdots, t_n] \otimes V \to k[t_1, \cdots, t_n] \to k \to 0$$

   donde $V = \oplus_{i=1}^n ke_i$ y $d(e_i) = (t_i - 1)$. da una resolución de $k$ como $k[t_1, \ldots, t_n]$ módulo donde la acción es evaluar $t_i$ en 1 (no en 0). Muestre que localizando la anterior, se obtiene una resolución de $k$ como $k[\mathbb{Z}^n]$-módulo de la forma

$$0 \to k[\mathbb{Z}^n] \otimes \Lambda^n V \to \cdots \to k[\mathbb{Z}^n] \otimes \Lambda^2 V \to k[\mathbb{Z}^n] \otimes V \to k[\mathbb{Z}^n] \to k \to 0$$

5. Sea $F_n$ el grupo libre con $n$ generadores $x_1, \ldots, x_n$ y $k$ un anillo conmutativo. Muestre que hay una resolución de $k[F_n]$ como $k[F_n]$-bimódulo de la forma

$$0 \to k[F_n] \otimes V \otimes k[F_n] \to k[F_n] \otimes k[F_n] \to^{\epsilon} k[F_n] \to 0$$

   donde $V = \bigoplus_{i=1}^n ke_i$, con las "mismas" fórmulas que la resolución del álgebra tensorial. Concluya que

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} k[F_n]e_i \to k[F_n] \to^{\epsilon} k$$

$$e_i \mapsto x_i - 1$$

   donde $\epsilon(g) = 1$ para todo $g \in F_n$, es una resolución libre de $k$ como $k[F_n]$-modulo. En particular $H^k(F_n, M) = H_k(F_n, M) = 0$ para todo $k > 1$ y para todo $k[F_n]$-modulo $M$.

6. (Lema de Shapiro) Sea $H$ un subgrupo de $G$, y $N$ un $\mathbb{Z}[H]$-módulo, entonces

$$H_*(G, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} N) \cong H_*(H, N)$$

$$H^*(G, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], N)) \cong H^*(H, N)$$

   mostrar que si $[H : G] < \infty$, entonces

$$\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} N \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], N)$$

   como $\mathbb{Z}[G]$-modulo, con un isomorfismo natural en $N$.

7. Sean $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Bajo la hipotesis que $B$ sea $A$-playo, o $A$-proyectivo, generalice el lema de Shapiro.

## 5.2. Cálculo iterativo de grupos de orden $p^n$

Sea $p$ primo y $E$ un grupo de orden $p^n$. Entonces $E$ tiene centro no trivial y por lo tanto un subgrupo (central), y en consecuencia un subgrupo (central) isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $E$ contiene a $\mathbb{Z}_p$. Luego $G := E/\mathbb{Z}_p$ es un grupo de orden $p^{n-1}$. Si (inductivamente) conocemos *todos* los grupos $G$ de orden $p^{n-1}$, entonces sólo tenemos que calcular $H^2(G, \mathbb{Z}_p)$ y reconstruir todos los posibles grupos de orden $p^n$.

**Atención:** Hay más de 10 millones de (clases de isomorfismo de) grupos de orden 512. (más precisamente, hay 10494213 (GAP)).

## 5.3. Grupos de orden $p^3$

1. Sea $C_n = \langle t : t^n = 1\rangle$ el grupo (multplicativo) cíclico de orden $n$. Utilice la resolución pequeña de $\mathbb{Z}$ como $C_n$-módulo trivial para calcular $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[C_n]}(C_n, M)$ donde $M$ es un $C_n$-módulo. Explicite el caso en que $M$ tiene acción trivial.

2. Sea $G = C_n \times C_n$. Use la fórmual de Künneth para mostrar que el producto tensorial (sobre $\mathbb{Z}$) de las resoluciones de $C_n$ da una resolución para $C_n \times C_n$ Explicite lo más posible $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[C_n \times C_n]}(C_n, M)$ donde $M$ es un módulo con acción trivial.

3. Sea $E$ un grupo de orden $p^3$. Muestre que $E$ aparece en una extensión de la forma

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to E \to G \to 1$$

   donde $G \cong C_{p^2}$ o $G \cong C_p \times C_p$, y $\mathbb{Z}_p$ es central (y por lo tanto la acción de $G$ en $\mathbb{Z}_p$ es trivial). Calcule todos los posibles grupos de orden $p^3$.

4. Otra estrategia podría ser: si $|E| = p^3$ entonces $E$ admite un subgrupo invariante de orden $p^2$, llamémoslo $M$, y por lo tanto $M$ es necesariamente abeliano (aunque no necesariamente central), y $G = E/M \cong C_p$.

   - Muestre que si $M$ es central entonces $E$ es abeliano, y del teorema de estructura sobre un dip sabemos que $E \cong \mathbb{Z}_{p^3}$, $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$, o $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.
   - Si $M$ no es central, entonces se tiene un acción no trivial de $C_p$ en $M$.
     - Según $M \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ o $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, encuentre los elementos de orden $p$ en $U(\mathbb{Z}_{p^2})$, o en $GL(2, \mathbb{Z}_p)$, eso dará las posibles acciones de $C_p$ en $M$.
     - para cada una de las acciones (o de las acciones a menos de conjugación) calcule $H^2(C_p, M)$, y reconstruya las posibles tablas de multiplicar en $E$.

# 6. (co)Homología de Hochschild

1. Sea $M$ un $A$-bimódulo $k$-simétrico. Se define el complejo

$$C_n(A,M) = M \otimes A^{\otimes n} \ (n \geq 0)$$

con diferencial

$$b(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = ma_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}$$

Muestre que
$$(C_\bullet(A,M), b) \cong M \otimes_{A^e} A \otimes A^\bullet \otimes A, \mathrm{Id}_M \otimes b')$$

2. Sea $M$ un $A$-bimódulo $k$-simétrico. Se define

$$C^n(A,M) = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) \ (n \geq 0)$$

con diferencial

$$\partial(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) + (-1)^n f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}) a_n$$

Muestre que
$$(C^\bullet(A,M), \partial) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes A^\bullet \otimes A, M), (b')^*)$$

En partirular, si $A$ es $k$-proyectiva, entonces la (co)homología de estos complejos calculan $\mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A,M)$ y $\mathrm{Ext}_{A^e}^\bullet(A,M)$ respectivamente.

3. $H_0(A,M) = M/[A,M]$.

4. (Diferenciales de Kähler) Si $A$ es conmutativo, muestre que la multiplicación $m : A \otimes A \to A$ es morfismo de álgebras. Sea $I = \mathrm{Ker}(m)$ y definimos $\Omega_k(A) = I/I^2$.

   a) $A \otimes A$ es un $A$-bimódulo no simétrico ( $a \cdot (x \otimes y) \neq (x \otimes y) \cdot a$ en general). $I$ es un sub-bimódulo, en general no simétrico, pero $I/I^2$ es un $A$-bimódulo $A$-simétrico ($a \cdot \omega = \omega \cdot a$, $\forall a \in A, \omega \in I/I^2$).

   b) Sea $d : A \to A \otimes A$ definido por $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$. Muestre que $d$ es una derivación, y que su imagen está contenida en $I$. Por abuso de notación llamamos con la misma letra $d : A \to \Omega_k(A)$ dada por $d(a) = \overline{1 \otimes a - a \otimes 1}$.

   c) Si $\sum_i a_i \otimes b_i \in I$, entonces $\sum_i a_i b_i = 0$. Utilice este hecho para mostrar que en $\Omega_k^1(A)$
   $$\sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i a_i d(b_i) = \sum_i d(b_i) a_i$$
   En particular, la imagen de $d : A \to \Omega_k^1(A)$ genera $\Omega_k^1(A)$ como $A$-módulo.

*d*) Consideramos $H_\bullet(A,A)$ calculado con la resolución standard. En lugar 1:

$$\cdots \xrightarrow{b} A^{\otimes 3} \xrightarrow{b} A^{\otimes 2} \xrightarrow{b} A \longrightarrow 0$$

$$a\otimes b\otimes c \mapsto ab\otimes c - a\otimes bc + ca\otimes b$$

Notar que para $A$ conmutativo, $b : A^{\otimes 2}\to A$ es cero. $H_1(A,A) = A^{\otimes 2}/b(A^{\otimes 3})$. Muestre que $ad(b) \leftrightarrow \overline{a\otimes b}$ está bien definida entre $\Omega^1_k(A)$ y $H_1(A,A)$ dando un isomorfismo

$$\Omega^1_k(A) \cong H_1(A,A)$$

(en particular $\overline{a\otimes 1} = 0 \in H_1(A,A)$)

5. *Propiedad universal de* $\Omega^1_k(A)$. Sea $A$ una $k$-álgebra conmutativa y $M$ un $A$-módulo a izquierda, que lo vemos como $A$-bimódulo ($A$-simétrico). Si $f : \Omega^1_k(A)\to M$ es un morfismo $A$-lineal, entonces $f\circ d : A\to M$ es una derivación $k$-lineal. Muestre que si $D : A\to M$ es una derivación $k$-lineal, entonces $\exists!$ morfismo $A$-lineal $\widetilde{D} : \Omega_1(A)\to M$ tal que $D = \widetilde{D}\circ d$. En diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d"'] & M \\ \Omega^1_k(A) \arrow[ur, dashed, "\exists!\widetilde{D}"'] & \end{tikzcd}$$

En el Hom: la composición con $d$ induce una biyección (natural en $M$)

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_k(A), M) \cong \mathrm{Der}_k(A,M)$$

$$f \mapsto D_f = f\circ d$$

6. (1-formas no conmutativas) Si $A$ es una $k$-álgebra no necesariamente conmutativa se define

$$\Omega^{nc}_k(A) := \mathrm{Ker}(m : A\otimes A\to A)$$

como $m$ es morfismo de $A$-bimódulos, es un $A$-bimódulo. Muestre que es $k$-simétrico y que $d : A\to \mathrm{Ker}(m)$ dado por

$$d(a) = 1\otimes a - a\otimes 1$$

es una derivación $k$-lineal. Por lo tanto, si $M$ es otro $A$-bimódulo $k$-simétrico y $f : \Omega^{nc}_k(A)\to M$ es un morfismo de $A$-bimódulos, $f\circ d : A\to M$ es una derivación $k$-lineal. Muestre que esta derivación $d : A\to\Omega^{nc}_k(A)$ es universal en el sentido que para todo $A$-bimódulo $k$-simétrico $M$, se tiene la propiedad universal

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d"'] & M \\ \Omega^1_k(A) \arrow[ur, dashed, "\exists!\widetilde{D}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{D}$ es morfismo de $A$-bimódulos. En términos de Hom: la composición con $d$ induce una biyección (natural en los $A$-bimódulos $k$-simétricos $M$)

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega^{nc}_k(A), M) \cong \mathrm{Der}_k(A,M)$$

$$f \mapsto D_f = f\circ d$$

7. $H^0(A,M) \cong M^A := \{m \in M : am = ma \; \forall a \in A\}$.

8. $H^1(A,M) = \mathrm{Der}_k(A,M)/Innder(A,M)$, donde $\mathrm{Der}_k(A,M) = \{D : A \to M$ $k$-lineal$/D(ab) = aD(b) + D(a)b \forall a,b \in A\}$, $Innder = \{D : \exists m_0 \in M/D(a) = am_0 - m_0a\}$.

9. Sea $C^n(A) = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$. Definimos, para $f \in C^p(A)$, $g \in C^q(A)$, $f \cup g \in C^{p+q}(A)$ via

$$(f \cup g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q) := f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p)g(b_1 \otimes \cdots \otimes b_q)$$

Muestre que es un producto asociativo en $C^\bullet(A) = \oplus_n C^n(A)$ y que

$$\partial(f \cup g) = \partial(f) \cup g + (-1)^p f \cup \partial(g)$$

En particular, $HH^\bullet(A) = \oplus_n H^n(A,A)$ es un álgebra asociativa graduada con el producto inducido por $\cup$. Por ejemplo, $HH^\bullet(A)$ es una $Z(A)$-algebra, pero también si $D$ y $D'$ son derivaciones, entonces $f(a \otimes b) := D(a)D'(b)$ es un 2-cociclo.

## 6.1. Sobre la fórmula $H^\bullet(k[G], M) = H^\bullet(G, M^{ad})$

1. Si $M$ es un $k[G]$-bimódulo, se define $M^{ad}$ como el $G$-módulo a izquierda con acción

$$g \cdot_{ad} m := gmg^{-1}$$

Observación: el funtor $ad$ preserva el espacio vectorial subyacente, por lo tanto preserva límites y colímites, sumas directas y productos directos. Veremos que también preserva objetos proyectivos e inyectivos, lo que nos dará una relación entre la (co)homología de grupos y la (co)homología de Hochschild de $k[G]$.

2. Si $M$ es un $k[G]$bimódulo, entonces

$$H^0(k[G], M) = M^{k[G]} = \{m \in m : am = ma, \; \forall a \in k[G]\}$$

$$= (M^{ad})^G = \{m \in M : g \cdot_{ad} m = m, \; \forall g \in G\}$$

3. Si $M = k[G] \otimes k[G]$ como $k[G]$-bimódulo, entonces

$$M^{ad} \cong k[G]^{(G)} = k[G] \otimes V$$

donde a a derecha la acción de $k[G]$ es en el primer tensor, y $V$ es un $k$-módulo libre de rango $\#G$. Sugerencia: considere el morfismo $k$-lineal

$$k[G] \otimes k[G] \to k[G] \otimes V$$

$$g \otimes g' \mapsto g \otimes g'g$$

donde $V = k[G]$ como $k$-módulo. Encuentre la aplicación inversa y muestre que realiza el isomorfismo deseado. Concluya que si $P$ es $k[G]^e$ proyectivo entonces $M^{ad}$ es $k[G]$-proyectivo como $G$-módulo.

4. Sean $V$ y $W$ dos $G$-módulos. Muestre que
$$Hom_k(V, W)$$
es un $k[G]$-bimódulo vía
$$(gfg')(v) := gf((g')^{-1}m)$$
y por lo tanto un $G$-módulo v'ia la acción adjunta
$$(g \cdot_{ad} f)(v) = gf(g^{-1}(v)$$
Muestre que
$$(Hom_k(V, W))^{k[G]} = (Hom_k(V, W)^{ad})^G = Hom_{k[G]}(V, W)$$

5. Sea $A$ una $k$-álgebra con $k$ un cuerpo (o ue $A$ sea $k$-proyectiva), muestre que si $P_A$ es $A$-proyectivo a derecha, entonces el $A$-módulo a izquierda
$$I := \mathrm{Hom}_k(P_A, k)$$
es inyectivo como $A$-módulo a izquierda.

6. Sea $M$ un $k[G]^e$-módulo a izquierda, luego $M^*$ es $k[G]^e$-módulo a derecha (y por lo tanto a izq.), si $p : P \to M^*$ un epi con $P$ un $k[G]^e$-proyectivo (a derecha), entonces
$$p^* : M^{**} \to P^*$$
es monomorfismo, con $P^*$ un $k[G]^e$ módulo (a izquierda) inyectivo. Luego, la composición $M \to M^{**} \to P^*$ nos da un mono en un $k[G]^e$-inyectivo. Concluya que todo inyectivo es isomorfo a un factor directo de un producto arbitrario de $(k[G]^e)^*$

7. Sea $I$ un $k[G]^e$-inyectivo, que podemos suponer un sumando directo de $((k[G]^e)^{(X)})^* = ((k[G]^e)^*)^X = (k^{G\times G})^X$. Muestre que el $k[G]$-bimódulo $(k[G]^e)^* \cong k^{G\times G}$ verifica
$$(k^{G\times G})^{ad} \cong (k^G)^X$$
con $\#X = \#G$. Concluya que si $I$ es $k[G]^e$ inyectivo entonces $I^{ad}$ es inyectivo como $G$-módulo.

8. Muestre que $H^\bullet(k[G], M) = H^\bullet(G, M^{ad})$. Sugerencia: calcule $H^\bullet(k[G], M)$ usando una resolución $k[G]^e$ **inyectiva** de $M$.

## 6.2. Suavidad y HKR

Notación: $HH_\bullet(A) := H_\bullet(A, A)$ y $HH^\bullet(A) := H^\bullet(A, A)$.

1. Utilice la resolución
$$0 \to TV \otimes V \otimes TV \to TV \otimes TV \to TV \to 0$$
$$1 \otimes v \otimes 1 \mapsto v \otimes 1 - 1 \otimes v$$
de $TV$ como $TV$-bimódulo para describir un complejo que calcule $HH_\bullet(TV)$ y $HH^\bullet(TV)$.

2. (supogamos $k$ cuerpo) Sean $A$ y $B$ dos $k$-álgebras sobre un cuerpo $k$, muestre que $HH_\bullet(A \otimes B) \cong HH_\bullet(A) \otimes HH_\bullet(B)$.

3. (supogamos $k$ cuerpo) Sea $A$ tal que admite una resolución de $A^e$-módulos proyectivos de tipo finito (por ejemplo si $A^e$ es noetheriano). Muestre que $HH^\bullet(A \otimes B) \cong HH^\bullet(A) \otimes HH^\bullet(B)$.

4. Sea $V$ un $k$-espacio vectorial de dimensión finita, muestre que
$$HH_\bullet(S(V)) \cong S(V) \otimes \Lambda^\bullet V$$
$$HH^\bullet(S(V)) \cong S(V) \otimes \Lambda^\bullet V^*$$
Sugerencia: para $\dim V = 1$, $V = kx$ entonces $S(V) = k[x] = T(kx)$, se puede calcular como en el ejercicio 1. Para $\dim V > 1$, si $V = V_1 \oplus V_2$ muestre que $S(V_1 \oplus V_2) \cong S(V_1) \otimes S(V_2)$, idem para $\Lambda^\bullet(V_1 \oplus V_2)$, y utilice los ejercicios 2 y 3.

5. Sea $0 \to M \to B \to A \to 0$ una s.e.c. donde $p : B \to A$ es un epi de $k$-álgebras con núcleo $M$ de cuadrado cero.

   *a*) Sea $s : A \to B$ una sección $k$-lineal. Se define $f_s : A^{\otimes 2} \to B$ vía
   $$f_s(a \otimes a') := s(a)s(a') - s(aa')$$
   claramente, si $s$ es una sección multiplicativa, $f_s \equiv 0$. Muestre que $Im(f_s) \subseteq \mathrm{Ker}(p) = M$, y por lo tanto $f_s : A^{\otimes 2} \to M$.

   *b*) Sea $\widetilde{s} : A \to M$ *otra* sección, denotamos $f = f_s$ y $\widetilde{f} = f_{\widetilde{s}}$. Muestre que $f$ es cohomóloga a $\widetilde{f}$, es decir, $[f] = [\widetilde{f}]$ en $H^2(A, M)$, o sea, existe $D : A \to M$ tal que $f - \widetilde{f} = \partial D$.
   concluya que la asignación
   $$(0 \to M \to B \to A \to 0) \mapsto [f] \in H^2(A, M)$$
   que a una s.e.c. que se parte como sucesión de $k$-módulos, le asigna el 2-cociclo $f$, esta bien definida.

   *c*) Muestre que una sucesión $0 \to M \to B \to A \to 0$ que se $k$-parte admite una sección de $k$-álgebras si y sólo si el cociclo $[f]$ correspondiente es 0 en $H^2(A, M)$.

**Definición:** Sea $A$ conmutativa, se dice **suave** si para tiene la siguiente propiedad de levantamiento: $\forall$ $k$-álgebra conmutativa $C$ y todo ideal $I \subset C$ de cuadrado cero, si $f : A \to C/I$ es un morfismo de $k$-álgebras,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r, "p"] & C/I \arrow[r] & 0 \\
 & & & A \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted, "\exists \widetilde{f}"] &
\end{tikzcd}$$

Es decir, si $p*$
$$\mathrm{Hom}_{k-alg}(A, C) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}_{k-alg}(A, C/I) \to 0$$
es suryectiva, para toda $k$-álgebra conmutativa $C$ e ideal $I \subset C$ de cuadrado cero.

6. Sea $A$ $k$-álgebra conmutativa, $M$ un $A$-módulo, que lo vemos como $A$-bimódulo simétrico, y $f : A^{\otimes 2} \to M$ un 2-cociclo de Hochschild. Muestre que

$$B := (M \oplus A, *_f)$$

es una $k$-álgebra conmutativa $\iff$ $f$ es simétrico, es decir, $f(a \otimes a') = f(a' \otimes a)$ $\forall a, a' \in A$.

7. Sea un diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r, "p"] & C/I \arrow[r] & 0 \\ & & & A \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd}$$

como en la definición de suavidad. Muestre que

a) el pull-back

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r, "p"] & C/I \arrow[r] & 0 \\ & & A\prod_{C/I} C \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$$B := A \prod_{C/I} C = \{(a, c) \in A \times C : f(a) = p(c)\}$$

es una $k$-álgebra (conmutativa) y que la flecha $B \to A$ es sobreyectiva, con núcleo un ideal de cuadrado cero (isomorfo a $I$).

b) Si $p$ es $k$-split, entonces $B \to A$ es $k$-split, y por lo tanto $B \cong (I \oplus A, *_f)$ para un cierto 2-cociclo simétrico $f : A^{\otimes 2} \to I$.

c) Muestre que si el 2-cociclo $f$ anterior es cohomólogo a 0, entonces existe $s : A \to B$ un splitting de álgebras de $B \to A$ y por lo tanto existe $\widetilde{f}$ como en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r, "p"] & C/I \arrow[r] & 0 \\ & & A\prod_{C/I} C \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted, "\widetilde{f}"'] \arrow[l, dotted, bend left, "s"] & \end{tikzcd}$$

d) Supongamos $k$ es un cuerpo y $A$ una $k$-álgebra conmutativa. Muestre que si para todo $A$-módulo a izquierda $M$, que lo vemos como $A$-bimódulo simétrico, si todo 2-cociclo $f : A^{\otimes 2} \to M$ es cohomólogo a uno antisimétrico, entonces $A$ es suave.

e) Use la resolución de Koszul de $A = S(V)$ para mostrar que $S(V)$ es suave.

## 6.3. Separabilidad, derivaciones y (co)Homología

**Definición / Teorema:** Sea $f : R \to S$ un morfismo de anillos, son equivalentes:

1. El morfismo inducido por la multiplicación $S \otimes_R S \to S$ admite una sección $S$-lineal a izquierda y derecha.

2. Para todo $S$-módulo $N$ (en particular es $R$-módulo via $f$, el epimorfismo $S \otimes_R N \to N$ se parte (como morfismo de $S$-módulos), de forma natural en la variable $N$.

3. Para todo $S$-bimódulo $M$, si $D : S \to M$ es una derivación que se anula en $R$, entones es interior.

4. Si $\Omega^{nc}_R(S) = \mathrm{Ker}(m : S \otimes_R S \to S)$, entonces la derivación $d : S \to \Omega^{nc}_R(S)$ dada por $d(s) = s \otimes 1 - 1 \otimes s$ es interior.

Si una de estas condiciones se verifica, diremos que $S$ es separable sobre $R$ (en el sentido no necesariamente conmutativo).

**Observación:** $a \otimes 1 - 1 \otimes a = a \cdot (1 \otimes 1) - (1 \otimes 1) \cdot a$, luego, la derivación $d : S \to S \otimes_R S$ dada por $d(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$ siempre es interior, pero en el punto (d) anterior se pide que $d : S \to \Omega^{nc}_R(S)$ sea interior, y $1 \otimes 1 \notin \mathrm{Ker}(m)$, asi que la condición (d) exije que exista $\omega = \sum_i a_i \otimes b_i \in S \otimes_R S$ con $\sum_i a_i b_i = 0$ tal que

$$s \otimes 1 - 1 \otimes s = \sum_i s a_i \otimes b_i - a_i \otimes b_i s$$

Referencia para 3. y 4.: ver Prop. 7.2 (pag. 21) de `http://mate.dm.uba.ar/~mfarinat/ERP/Galois.pdf` (y referencias ahí) y hacer previamente el ejercicio 2:

1. Demuestre la equivalencia entre 1 y 2 de la definición de separabilidad.

2. Sea $R \to S$ un morfismo de anillos, muestre que $\Omega^1_{nc}(S/R) := \mathrm{Ker}(S \otimes_R S \to S)$ es un $S$ bimódulo, y $d : S \to \Omega^1_{nc}(S/R)$ dado por

$$d(a) = 1 \otimes_R a - a \otimes_R 1$$

es una derivación que se anula en $R$, que tiene la propiedad universal siguiente:

Para todo $S$-bimódulo $M$ y para toda derivación $D : S \to M$ que se anule en $R$, existe un morfismo de bimódulos $\widetilde{D} : \Omega^1_{nc}(S/R) \to M$ tal que $D = \widetilde{D} \circ d$.

En diagramas: $\forall D \in \mathrm{Der}_R(S, M) = \{D : S \to M \text{ derivación } R\text{-lineal}\}$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d"'] & M \\ \Omega^1_R(S) \arrow[ur, dashed, "\exists ! \widetilde{D}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{D}$ es morfismo de $S$-bimódulos. En términos de Hom: la composición con $d$ induce una biyección (natural en los $S$-bimódulos $M$)

$$\mathrm{Hom}_{S-bimod}(\Omega^{nc}_R(S), M) \cong \mathrm{Der}_R(S, M)$$

$$f \mapsto D_f = f \circ d$$

3. Utilizando la construcción anterior, lea de la referencia la dem. de la equivalencia de 1 y 2 con 3 y 4 de la definición de separabilidad.

4. Ejemplos: $k \times k$ es separable sobre $k$, también $\underbrace{k \times \cdots \times k}_{n-veces}$ es $k$-separable. pero $k[x]/(x^2)$ no, tampoco $k[x]/(x^N)$ (donde $N \geq 2$). (Trate de demostrar esto por lo menos de 2 maneras distintas.

5. $\mathcal{H}$ es separable sobre $\mathbb{C}$, y sobre $\mathbb{R}$ (ver 5(b)).

6. Muestre que $M_n(A)$ es $A$-separable.

7. Sea $k \to R$ y $R \to S$ dos morfismos de anillos.

   *a*) Muestre que si $S$ es $k$-separable, entonces $S$ es $R$-separable.

   *b*) Muestre que si $S$ es $R$-separable y $R$ es $k$-separable, entonces $S$ es $k$-separable.

8. Sea $A$ una $k$-algebra (o sea, $k \to Z(A)$), muestre que son equivalentes

   - $A$ es $k$-separable
   - $H^n(A, M) = 0$ para todo $n > 0$ y para todo $A$-bimódulo $k$-simétrico $M$,
   - para toda derivación $k$-lineal $D : A \to M$, existe $m_0 \in M$ tal que $d(a) = am_0 - m_0 a$.

9. Sea $k$ un cuerpo de característica $p$, $\lambda \in k$ y $A = k[x]/(x^p - \lambda)$. Muestre que la aplicación $E : A \to A$ dada por $E(x^i) = ix^i$ $(i = 0, \ldots, p-1)$ es una derivación. Concluya que $A$ no es separable.

10. Si $A = k[x]/(x^N)$, muestre que $x^i \mapsto ix^i$ es una derivación, luego, $A$ no es separable.

11. Sea $D : A \to M$ una derivación y $e \in A$. Muestre que si $e^2 = e$ entonces existe una derivación $\widetilde{D} : A \to M$ que es igual a $D$ módulo derivaciones interiores y que verifica $\widetilde{D}(ea) = e\widetilde{D}(a)$ y $\widetilde{D}(ae) = \widetilde{D}(a)e$ para todo $a$.

12. Sea $A$ una $k$-álgebra y supongamos $k \subset R \subset A$, con $R$ un subanillo de $A$ (y por lo tanto una $k$-álgebra). Consideramos en complejo con $\otimes_R$ en lugar de $\otimes_k$:

    $$\cdots \to A \otimes_R A \otimes_R A \to A \otimes_R A \otimes_R A \to A \otimes_R A \to A \to 0$$

    Muestre que es exacto (sugerencia: la "misma" homotopía de antes sigue funcionando).

13. Sea $k \subseteq R \subseteq A$ como antes, pero asuminos $R$ es separable sobre $k$. Muestre que una sección de $R$ bimódulos de la multiplicación

    $$\begin{tikzcd} R \otimes_k R \arrow[r, "m"] & R \arrow[l, dotted, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

induce una sección de $A$-bimódulos, para cualquier $M \in {}_AMod_R$ y $N \in {}_RMod_A$:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R R \otimes_k R \otimes_R N \arrow[r] & M \otimes_R R \otimes_R N \arrow[l, dotted, bend right] \\
M \otimes_k N \arrow[u, equal, "\cong"] \arrow[r] & M \otimes_R N \arrow[u, equal, "\cong"'] \arrow[l, dotted, bend left, "s'"]
\end{tikzcd}$$

Concluya que (si $R$ es separable sobre $k$ entonces) $M \otimes_k N$ es un sumando directo de $M \otimes_R N$ como bimódulo y que la resolución con $\otimes_R$ en vez de $\otimes_k$ es $A^e$-proyectiva, y puede ser utilizada para calcular la homología y cohomología de $A$ como $k$-álgebra. Más generalmente, se pueden usar módulos que sean sumandos directos de sumas directas de $A \otimes_R A$ (en vez de sumandos directos de sumas directas de $A \otimes_k A$). Observar que esto muestra el ejercicio 11, incluso para cociclos de cualquier grado.

14. Sea $Q$ un quiver con $Q_0$ finito, $I$ un ideal admisible de $kQ$ y $A = kQ/I$. Muestre que $kQ_0$ es $k$ separable y por lo tanto, para $A$ se puede utilizar la resolución con $\otimes_{kQ_0}$ en vez de $\otimes_k$. Más generalmente, si se tiene un complejo de la forma

$$\cdots A \otimes_{kQ_0} V_n \otimes_{kQ_0} A \to \cdots \to A \otimes_{kQ_0} V_1 \otimes_{kQ_0} A \to A \otimes_{kQ_0} A \to A \to 0$$

que es exacto, entonces es una resolución $A^e$-proyectiva de $A$.

15. Sea $A = kQ$ con $Q$ finito. Con la resolución de largo 1 de $A$ como $A^e$-módulo

$$0 \to A \otimes_{kQ_0} kQ_1 \otimes_{kQ_0} A \to A \otimes_{kQ_0} A \to A \to 0$$

describir homología y cohomología de Hochschild a coeficientes en el $A$ bimódulo $kQ_0$ en términos del quiver.

16. Sea $Q$ un quiver con $Q_0$ finito, considerar $kQ$, $I = (Q_1)$ el ideal generado por las flechas, y $A = kQ/(I)^2$. Utilizar la resolución

$$\cdots \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_3 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_2 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_1 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \to 0$$

para describir homología y cohomología de Hochschild a coeficientes en el $A$-bimódulo $kQ_0$ en términos del quiver.

## 6.4. Dualidad de Van den Bergh

El objetivo es demostrar el siguiente teorema:

**Teorema:** *(M. Van den Bergh) Sea $A$ una $k$-álgebra que admite una resolución $A^e$ proyectiva $P_\bullet \to A$ con $P_n$ finitamente generado (como $A^e$-módulo) $\forall n$. Son equivalentes*

*i) $pdim_{A^e}(A) = d$ y*

$$\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e) \cong \begin{cases} A & si\ n = d,\ iso\ como\ A^e\text{-}módulo \\ 0 & si\ n \neq d \end{cases}$$

*ii)* $\exists d \in \mathbb{N}$ *y un isomorfismo (de k-módulos) natural en M*

$$H^\bullet(A,M) \cong H_{d-\bullet}(A,M)$$

*para todo A-bimódulo M.*

Una $k$-álgebra satisfaciendo alguna de estas condiciones se denomina Calabi-Yau.

Van den Bergh mostró un teorema un poco más general, con $\mathrm{Ext}_{A^e}(A,A^e) \cong U \in Pic_k(A)$, del cual $U = A$ es un caso particular, y $U = A_\phi$=el bimódulo $A$ con acción de un lado torcida por un automorfismo de $A$ se denomina *twisted Calaby - Yau.* Una $k$-álgebra que satisface el teorema general se dice que verifica la dualidad de Van den Bergh. Esta versión (y su demostración) se recoge la idea principal del teorema de Van den Bergh.

**Obs:** Cualquiera de esas condiciones equivalentes implican a su vez que $A$ tiene dimensión global finita, por lo tanto, en el caso conmutativo y característica cero implica suavidad.

1. Sea $A$ un anillo, $M \in {}_AMod$ y $N \in {}_AMod_B$. Muestre que $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ es naturalmente un $B$-módulo a izquierda. Concluya que $\mathrm{Ext}^n_A(M,N)$ hereda una estructura de $B$-módulo a izquierda. Si $b \in B$ y $r_b$ es la multiplicación a derecha en $N$:

$$r_b : N \to N$$

$$x \mapsto xb$$

   $r_b$ es $A$-lineal a izquierda y por la funtorialidad de Ext se tiene una flecha

$$\mathrm{Ext}^n_A(M,r_b) = (r_b)_* : \mathrm{Ext}^n_A(M,N) \to \mathrm{Ext}^n_A(M,N)$$

   Muestre que la estructura de $B$-módulo a izquierda está dada justamente por la flecha anterior, es decir, para cada $b \in B$,

$$b \cdot - = (r_b)_* : \mathrm{Ext}^n_A(M,N) \to \mathrm{Ext}^n_A(M,N)$$

2. Sea $A$ una $k$-álgebra, usando que $A^e$ es un $A^e$-BI-módulo, muestre que $H^\bullet(A,A^e) = \mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A,A^e)$ es un $A$-bimódulo.

3. *ii)* $\Rightarrow$ *i)*. Consideremos el caso $M = A^e$:

$$H^\bullet(A,A^e) \cong H_{d-\bullet}(A,A^e)$$

   Como

$$H_{d-\bullet}(A,A^e) = \mathrm{Tor}_{d-\bullet}(A,A^e)$$

   y $A^e$ es $A^e$-libre, luego proyectivo, luego playo,

$$\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,A^e) = H^\bullet(A,A^e) \cong \mathrm{Tor}_{d-n}(A,A^e) = 0 \forall n \neq d$$

   y para $n = d$

$$\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,A^e) \cong \mathrm{Tor}_0^{A^e}(A,A^e) = A \otimes_{A^e} A^e \cong A$$

   El isomorfismo en principio es como $k$-módulo. Utilice la naturalidad y la estructura de $A^e$-módulo a derecha de $A^e$ para concluir que el isomorfismo es de $A^e$-módulos.

   Por otra parte, como $H_n(A,M) = 0$ para $n < 0$, si $H^n(A,M) \cong H_{d-n}(A,A^e)$ entonces $H^n(A,M) = 0$ para $n > d$. Por otra parte $H^d(A.,A^e) \neq 0$ luego $pdim_{A^e}(A) = d$.

4. $i) \Rightarrow ii)$ sea
$$0 \to P_d \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$
una resolución proyectiva de $A$ como $A^e$-bimódulo donde cada $P_i$ es finitamente generado. Calculamos $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M)$ con una resolución así y obtenemos:
$$H^n(A, M) = H_n(\mathrm{Hom}_{A^e}(P_\bullet, M), d^*)$$
y como los $P_i$ son $A^e$-proyectivos de t.f.
$$\cong H_n(\mathrm{Hom}_{A^e}(P, A^e) \otimes_{A^e} M, d^* \otimes \mathrm{Id}_M) = H_n(P^*_\bullet \otimes_{A^e} M, d^* \otimes \mathrm{Id}_M)$$
Pero $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e) = 0$ salvo $n = d$,
$$\Rightarrow \; H_n(\mathrm{Hom}_{A^e}(P, A^e)) = 0$$
si $n \neq d$ y $\cong A$ si $n = d$, eso significa que el complejo
$$0 \to P^*_0 \to P^*_1 \to \cdots \to P^*_d \to 0$$
es exacto en todos lados salvo al final, y que el conúcleo de $P_{d-1} \to P_d$ es iso a $A$. O sea, salvo lugar desde donde se cuentan los grados, es una resolución proyectiva de $A$, pues $P^*_i$ es $A^e$ proyectivo. Llamemos $Q_i := P_{d-i}$, entonces tenemos
$$0 \to Q^*_d \to Q^*_{d-1} \to \cdots \to Q^*_0 \to 0$$
es una resolución $A^e$-proyectiva de $A$ y
$$H_n(Q_\bullet \otimes_{A^e} M) = \mathrm{Tor}^{A^e}_n(A, M) = H_n(A, M)$$
luego
$$H^n(A, M) = H_n(P^*_\bullet \otimes_{A^e} M) = H_n(Q_{d-\bullet} \otimes_{A^e} M) = H_{d-n}(A, M)$$

5. Si $A$ y $B$ son $k$-álgebras Calaby-Yau entonces $A \otimes B$ también (y la dimensión es la suma).

6. $A = M_n(k)$ es CY de dimensión 0. Luego, si $A$ es CY, entonces $M_n(A)$ también es CY (de la misma dimensión).

7. Si $A$ una $k$-álgebra CY y $G$ es un grupo finito con $|G|$ inversible en $A[G]$, el álgebra de grupo, también es CY (de la misma dimensión).

8. Sea $A$ una $k$-álgebra y $M$ un $A^e$-módulo. Recordamos $M^A = \{m \in M : am = ma \forall a \in A\} = H^0(A, M)$ y $M_A = M/[A, M] = H_0(A, M)$. La composición
$$\begin{tikzcd} M^A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend left] & M \arrow[r, two heads, "p"] & M_A \end{tikzcd}$$
define una transformación natural entre los funtores $(-)^A$ y $(-)_A$. Muestre que si esa transformación es un iso para todo $M$ entonces necesariamente $H^1(A, M) = 0$ todo $A^e$-módulo $M$, o sea, $pdim_{A^e}(A) = 0$; en particular, si $k$ es cuerpo, $A$ debe ser semisimple.

**Nota:** Marcelo Aguiar mostró -entre otras cosas- en [*A note on strongly separable algebras*, Bol. A.N.C. (Córdoba, Argentina), vol 65 (2000) 51-60] que si $k$ es cuerpo, $\dim_k A < \infty$ y la aplicación bilineal

$$A \times A \to k$$

$$(a,b) \mapsto tr(ab)$$

es no degenerada (donde $tr(a)$=traza del endomorfismo $x \mapsto ax$), entonces la transformación natural anterior $M^A \to M_A$ es un isomorfismo. O sea, $A$ es CY de dimensión 0. También mostró que en característica cero, $M^A \to M_A$ es iso si y sólo si $A$ es semisimple. Luego, $A = M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$ es CY de dimensión 0 (si las $D_i$ son álgebras de división de dimensión finita sobre $k$, por ejemplo, extensiones finitas de cuerpo). En consecuencia, si $B$ es CY de dimesnión $d$, entonces $M_{n_1}(B \otimes_k D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(B \otimes_k D_k)$ es también CY (de la misma dimensión).

9. Sea $A = k[x]/(x^2)$.
$$\mathrm{Ext}^0_{A^e}(A, A^e) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^e) \cong A$$
Use la resolución
$$\cdots \xrightarrow{x\otimes 1 - 1\otimes x} A^e \xrightarrow{x\otimes 1 + 1\otimes x} A^e \xrightarrow{x\otimes 1 - 1\otimes x} A^e \xrightarrow{x\otimes 1 + 1\otimes x} A^e \xrightarrow{x\otimes 1 - 1\otimes x} A^e \xrightarrow{\quad m \quad} A \to 0$$
para mostrar que
$$\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) = 0 \forall i > 0$$
Sin embargo $k[x]/x^2$ no es CY pues $pdim_{A^e}(A) = \infty$.

10. Si $A$ es CY y $S \subseteq A$ es un subconjunto central multiplicativamente cerrado entonces $A_S$ es CY (de la misma dimensión).

11. $k[x]$ es CY, luego $k[x_1, \ldots, x_n]$ también, y $k[\mathbb{Z}^n]$ también.

12. Si $G = \mathbb{Z}_p$ y $k$ es un cuerpo de caracterísica $p$, entonces $A = k[\mathbb{Z}_p]$ no es CY, pues $pdim_{A^e}(A) = \infty$ (notar que $A \cong k[x]/(x^p - 1)$, y si $t := x - 1$ entonces $A \cong k[t]/t^p$).

# 7. Álgebras filtradas: el ejemplo del álgebra de Weyl

$k$ en principio anillo conmutativo. Sea $\partial : k[x] \to k[x]$ dado por

$$\partial(p(x)) = p'(x)$$

y por abuso de notación, indicaremos $x$= la multiplicación por $x$, como endomorfismod e $k[x]$. Muestre que
$$[\partial, x] = \mathrm{Id} \in \mathrm{End}_k(k[x])$$
Se define el álgebra de Weyl $A_1(k) := k\{x,y\}/([y,x] = 1)$ y denotamos $\partial = \overline{y} \in A_1(k)$. Por lo anterior, $A_1(k)$ tiene a $k[x]$ como representación natural.

1. Muestre que los monomios $\{x^i \partial^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ forman un sistema de generadores como $k$-módulo.

2. *Supondremos de aquí en adelante que $k$ es un cuerpo de característica cero.* Muestre que $A_1(k)$ no tiene representaciones de dimensión finita sobre $k$. (Sugerencia: si $V$ es una representación de $A_1(k)$, se tiene que

$$[\partial|_V, x|_V] = \mathrm{Id}_V$$

donde, si $P \in A_1(k)$, denotamos $P|_V = P \cdot - : V \to V$. En particular, $\mathrm{Id}_V$ debe ser un conmutador, y si $V$ tiene dimensión finita esto implica que tiene traza cero, absurdo.

3. Consideremos $P = \sum_{i,j} a_{ij} x^i \partial^j \in A_1(k)$ y llamaremos *parte principal* a la parte con $j$ máximo dentro del soporte de los $a_{ij}$, es decir, que podemos escribir a $P$ como

$$P = p(x)\partial^N + \sum_{i,j:j<N} a_{ij} x^i \partial^j$$

Si $M = k[x]$ como $A_1(k)$-módulo, muestre que

$$P \cdot x^N = Np(x)$$

y por lo tanto $p(x)$ está bien definido (como función de $P$). Concluya con un argumento inductivo que $\{x^i\partial^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ no sólo generan sino que son una $k$-base de $A_1(k)$. (ell resultado es cierto en cualquier característica, pero con otra demostración)

4. Consideramos en $A_1(k)$ la filtración dada por $F_p(A_1(k)) = \langle x^i\partial^j : i + j \leq p \rangle$ (subespacio generado sobre $k$). Muestre que $gr(A_1(k)) \cong k[x, y]$ como $k$-álgebra.

5. Sea $P = \sum_j a_j p_j(x)\partial^j$, muestre que

$$[\partial, P] = \sum_j a_i p_j'(x)\partial^j$$

y si escribimos $Q = \sum_i x^i q(\partial)$ con $q$ un polinomio en $\partial$, entonces

$$[x, Q] = -\sum_i x^i q'(\partial)$$

   *a*) Concluya que $A_1(k)$ es simple (recordamos que asuminos $k$ cuerpo de caracterśtica cero). Más precisamente, si $I$ es un ideal bilátero y $P \in I$ es no nulo, entonces $I$ contiene una constante no nula.

   *b*) Concluya también (recordamos que asuminos $k$ cuerpo de caracterśtica cero) que $A_1(k)$ es central, es decir, $Z(A) = k$. Si $k$ tiene característica $p > 0$ muestre que $x^p$ y $\partial^p$ son centrales en $A_1(p)$

6. Sea $V$ el espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{e_x, e_\partial\}$. Muestre (Shridaran) que la siguiente es una resolución, donde los diferenciales son $A$-lineales a izquierda y derecha, definidos en base por

$$0 \to A \otimes e_x \wedge e_\partial \otimes A \longrightarrow A \otimes (ke_x \oplus ke_\partial) \otimes A \longrightarrow A \otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$$

$$\begin{array}{rcl} 1\otimes e_x\wedge e_\partial\otimes 1 & \mapsto & x\otimes e_\partial\otimes 1 - 1\otimes e_\partial\otimes x \\ & & -\partial\otimes e_x\otimes 1 + 1\otimes e_x\otimes \partial, \\ 1\otimes e_x\otimes 1 & \mapsto & x\otimes 1 - 1\otimes x, \\ 1\otimes e_\partial\otimes 1 & \mapsto & \partial\otimes 1 - 1\otimes \partial. \end{array}$$

Sugerencia:

*a*) Muestre que $d^2 = 0$

*b*) Encuentre una filtracion del complejo tal que el graduado asociado sea una resolución de Koszul.

7. Use la resolución anteror para mostrar que

$$H^\bullet(A,M) \cong H_{2-\bullet}(A,M)\ \forall M \in {}_AMod_A$$

(Observación: basta ver el caso $M = A^e$.) Calcule $HH^n(A)$ y $HH_n(A)$ para $n = 0,1,2$.

# 8. Álgebras de Lie, complejo de Chevalley-Eilenberg

## 8.1. El Casimir y álgebras semisimples

En esta sección y la siguiente supondremos $k$ un cuerpo de característica cero, y $\mathfrak{g}$ una $k$-álgebra de Lie de dimensión finita.

**Definición:** un ideal de un álgebra $\mathfrak{g}$ es un subespacio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

**Definición:** Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *simple* si no tiene ideales salvo 0 y $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}$ no es abeliana (excluyendo de esta manera el caso trivial cuando $\dim_k \mathfrak{g} = 1$)

**Definición:** Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *semisimple* si es isomorfa a un producto directo (con corchete coordenada a coordenada) de álgebras de Lie simples.

1. Sea $V$ un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita. Llamamos

$$x|_V := x\cdot - : V \to V$$

a la acción de un elemento $x$ de $\mathfrak{g}$ en $V$. Se define la forma bilineal asociada $b_V$ por

$$b_V(x,y) = tr_V(x|_V \circ y|_V)$$

donde $tr_V$ es la traza en $\mathrm{End}_k(V)$. Muestre que $b_V$ es simétrica y $\mathfrak{g}$-invariante en el siguiente sentido:

$$b_V(x,y) = b_V(y,x)$$

$$b_V([x,y],z) = b_V(x,[y,z])$$

Si $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita y $V = \mathfrak{g}^{ad}$, la forma bilineal se llama *forma de Killing* y se denota $(-,-)$, o $\kappa(-,-)$.

2. Calcule la matriz de la forma bilineal de $\kappa$ para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, muestre que la forma bilineal es no degenerada.

**Criterio de Cartan:** ($\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero)

i) $\mathfrak{g}$ es semi-simple si y sólo si su forma de Killing es no-degenerada.

ii) Si $\mathfrak{g}$ en una subálgebra de Lie $M_n(k)$, entonces $\beta(x,y) := tr(xy)$ (la traza usual de matrices) también es no degenerada.

Utilizaremos este criterio sin demostración. (Ver por ejemplo las referencias en la Wikipedia, o [Humphreys, J., Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.] o bien [Knapp, A., Lie Groups Beyond an Introduction. Progress in Mathematics, 140. Birkhäuser, Boston, MA, 1996.])

*De aquí en adelante $\mathfrak{g}$ es semisimple, o equivaletemente es tal que su forma de Killing es no degenerada.*

3. Sea $x_1,\dots,x_n$ una base, y sean $x^1,\dots,x^n$ en $\mathfrak{g}$ tales que

$$\kappa(x_i,x^j)=\delta_i^j$$

Muestre que el elemento, llamado **Casimir**, definido por

$$\Omega := \sum_{i=1}^n x_i x^i \in U(\mathfrak{g})$$

es independiente de la base elegida. En particular, $\Omega := \sum_{i=1}^n x_i x^i = \sum_{i=1}^n x^i x_i$.

4. Si $x \in \mathfrak{g}$ y $[x_i,x] = \sum_j c_{ij}x_j$ entonces $[x,x^j] = \sum_i c_{ij}e^j$ (sugerencia: use que la forma de Killing es invariante)

5. Muestre que $\Omega$ está en en centro de $U(\mathfrak{g})$, y por lo tanto para cualquier $\mathfrak{g}$-módulo $M$, la multiplicación por $\Omega$ es $U(\mathfrak{g})$-lineal.

6. Si $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\times\cdots\times\mathfrak{g}_k$ es un producto de simples, entonces su casimir $\Omega=\sum_{i=1}^k\Omega_i$ es a suma de los casimires de cada $\mathfrak{g}_i$.

7. (Lema de Schur) Sea $M$ un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita y simple (i.e. los únicos $\mathfrak{g}$-submódulos son 0 y $M$). Si $k$ es algebraicamente cerrado, muestre que la acción de $\Omega$ en $M$ es un múltplo de la identidad, es decir, $\exists c_M \in k$ tal que

$$\Omega|_M = c_M \mathrm{Id}_M$$

Notar que esto implica que $c_M \dim_k(M) = tr(\Omega|_M)$. *Sugerencia: muestre que $\Omega|_M$ tiene algun autovalor, y que el subespacio de autovectores correspondiente es un $\mathfrak{g}$-submódulo no nulo.*

## 8.2. Generalidades de representaciones y el Casimir

1. Sean $M$ y $N$ dos $\mathfrak{g}$-módulos, muestre que

   *a*) $M \otimes N$ es naturalmente un $\mathfrak{g}$-módulo con la acción
   $$x \cdot (m \otimes n) = xm \otimes n + m \otimes xn$$
   y el isomorfismo de trasposición $M \otimes N \cong N \otimes M$ es de $\mathfrak{g}$-módulos.

   *b*) $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ es un $\mathfrak{g}$-módulo via
   $$(x \cdot f)(m) := xf(m) - f(xm)$$
   En particular, viendo $k$ como $\mathfrak{g}$-módulo trivial, $M^*$ es $\mathfrak{g}$-módulo con $(x \cdot \phi)(m) = -\phi(xm)$.

   *c*) Muestre que el morfismo natural
   $$M^* \otimes N \to \mathrm{Hom}_k(M, N)$$
   es de $\mathfrak{g}$-módulos.

   *d*) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N) = \mathrm{Hom}_k(M, N)^{\mathfrak{g}}$ donde, si $V$ es una representación, $V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V : xv = 0 \forall x \in \mathfrak{g}\} \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(k, V)$.

   *e*) Si $M$ y $N$ son de dimensión finita, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N) \cong (M^* \otimes N)^{\mathfrak{g}}$

   *f*) La descomposición en tensores simétricos y antisimétricos $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} = S^2\mathfrak{g} \oplus \Lambda^2\mathfrak{g}$ es también como $\mathfrak{g}$-módulos. Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonce el "casimir"
   $$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x^i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$
   donde $\{x_i\}_i$ es una base y $\kappa(x_i, x^j) = \delta_i^j$ es un elemento simétrico e invariante, es decir, un elemento de $S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

2. Sea $\mathfrak{g}$ simple, muestre

   *a*) $M = \mathfrak{g}^{ad}$ es una representación simple, luego $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ tiene dimensión 1.

   *b*) $\mathfrak{g}$ semisimple entonces $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ como representaciones, si además $\mathfrak{g}$ es simple, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}) \cong (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ tiene dimensión 1. Concluimos que $(S^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ tiene dimensión 1 y está generado por el Casimir y que $(\Lambda^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = 0$. endenumerate

   *c*) Sea $\mathfrak{g}$ simple y Sea $M$ un $\mathfrak{g}$-módulo simple **no trivial** de dimensión $m$, llamemos
   $$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(M) = M_m(k)$$
   a la acción. Muestre que

      1) (usando el criterio de Cartan parte ii) $\beta(x, y) = tr(\rho(x) \circ \rho(y))$ es un múltiplo no nulo de la forma de Killing. Por lo tanto, si $x_1, \ldots, x_n$ es una base de $\mathfrak{g}$ y $\{y^1, \ldots, y^n\}$ en $\mathfrak{g}$ satisfacen
      $$\beta(x_i, y^j) = \delta_i^j$$
      entonces $\widetilde{\Omega} = \sum_{i=1}^n x_i y^i$ es un múltiplo escalar no nulo del Casimir de $\mathfrak{g}$.

2) La multiplicación por $\widetilde{\Omega}$ en $M$ es un múltiplo de la identidad, llamémoslo $\widetilde{c}_M$, que a su vez, es un múltiplo no nulo de la acción del Casimir $\Omega$ en $M$ (que es el escalar $c_M$).
3) Tomando traza al endomorfismo $\widetilde{\Omega}|_M$ muestre que ($k$ de característica cero) $\widetilde{c}_M = 1$, y por lo tanto $c_M \neq 0$.

3. Sea $\mathfrak{g}$ semisimple y $M$ de dimensión finita una representación simple no trivial. Muestre que el Casimir actúa por un escalar no nulo.

## 8.3. Lemas de Whitehead y Teorema de Weyl

En esta sección, $k$ es cuerpo de característica cero, y $\mathfrak{g}$ es semisimple.

1. Sea $M$ simple de dimensió finta que no es el módulo trivial. Muestre que

$$H^\bullet(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{U\mathfrak{g}}(k, M) = 0$$

*Sugerencia: para cualquier anillo $A$, $\mathrm{Ext}^\bullet_A(M,N)$ es siempre un $Z(A)$-módulo y su acción de $Z(A)$ inducida por la acción en $M$ coincide con la inducida por $N$. Luego, usando el Casimir, la multiplicación por un escalar no nulo (si lo vemos actuando en $M$) debe ser cero (si lo vemos actuando en $k$).*

2. Sea $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (muestre que si $\mathfrak{g}$ es semimisple entonces $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$). Muestre que $H^1(\mathfrak{g}, k) = 0$.

3. **Primer Lema de Whitehead**. Usando que $H^1(\mathfrak{g}, k) = 0$ y que $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$ para todo $M$ *simple* de dimensión finita que no sea el módulo trivial, muestre que (segundo Lema de Whitehead)

$$H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$$

para todo $M$ de dimensión finita. (Sugerencia: use inducción en la dimensión y la sucesión exacta larga de cohomología).

4. **Teorema de Weyl.** Sea $\mathfrak{g}$ semisimple y $k$ de característica cero. Entonces todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión de dimensión finita es completamente reducible, o equivalentemente, todo submódulo de un módulo de dimensión finita admite un complemento. O equivalentemente, la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos *de dimensión finita* es semisimple.

Demostración: Sea $M$ de dimensión finita que no sea simple y $M_0$ un submódulo propio, consideremos la s.e.c.

$$0 \to M_0 \to M \to M/M_0 \to 0$$

Utilice el isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^1_{U\mathfrak{g}}(M/M_0, M_0) \cong H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(M/M_0, M_0))$$

mas el primer Lema de Whitehead y concluya que la sucesión se parte, y por lo tanto $M_0$ se complementa en $M$.

5. Sea $0 \to k \to \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$ una s.e.c con $\pi$ morfismo de álgebras de Lie y $k$ un ideal de dimensión 1. Si $e \in \mathfrak{e}$ y $x \in \mathfrak{g}$, sea $\widetilde{x} \in \mathfrak{e}$ tal que $\pi(\widetilde{x}) = x$. Definimos

$$x \cdot e := [\widetilde{x}, e]$$

Muestre que está bien definido y que $\mathfrak{e}$ resulta un $\mathfrak{g}$-módulo con esta acción, y que $\pi$ resulta $\mathfrak{g}$-lineal. Concluya del Teorema de Weyl que $\pi$ admite una sección como $\mathfrak{g}$-módulo, y por lo tanto una sección de álgebras d eLie. Concluya que $H^2(\mathfrak{g}, k) = 0$ si $\mathfrak{g}$ es semisimple.

6. **Segundo Lema de Whithead.** Muestre que si $M$ tiene dimensión finita y $\mathfrak{g}$ es semisimple entonce $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$.

7. Muestre que $H^3(\mathfrak{sl}(2, k), k) \cong k$, por lo tanto no hay tercer lema de Whitehead.

## 8.4. Dualidad

Aquí $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, no es necesario que sea semisimple.

1. Muestre que si $M$ es una representación de dimensión 1, entonces $M \otimes M^* \cong k$ (la representación trivial).

2. Muestre que $\Lambda^i M \subset M^{\otimes i}$, donde $\Lambda^i M$= tensores completamente antisimétricos y $S^k(M)$=tensores simétricos son dos $\mathfrak{g}$-submódulos de $M^{\otimes i}$ para cualquier $i \geq 2$.

   En particular $\Lambda^k \mathfrak{g}$ es un $\mathfrak{g}$-módulo, y $\Lambda^{\dim M} M$ es un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión 1.

3. Muestre que si $\{v_1 \ldots, v_n\}$ es una base de $M$, $Vol_M = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ es un generador de $\Lambda^{\dim M} M$, y

$$x \cdot Vol = tr(x|_M) Vol_M$$

   Una $\mathfrak{g}$ donde $tr(ad_x) = tr(x|_{\mathfrak{g}^{ad}}) = 0$ para todo $x$ se dice *unimodular*. Es decir, $\mathfrak{g}$ se dice unimodular $\iff \Lambda^{\dim \mathfrak{g}} \mathfrak{g} = (\Lambda^{\dim \mathfrak{g}} \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

4. Muestre que si $\dim \mathfrak{g} = n$, entonces $H^n(\mathfrak{g}, \Lambda^n \mathfrak{g}) = k$

5. Muestre que $\mathrm{Ext}^\bullet_{U\mathfrak{g}}(M, N) = H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(M, N))$, luego

$$gldim(U\mathfrak{g}) = n, \qquad \text{donde } \dim_k \mathfrak{g} = n$$

6. Muestre que si $\mathfrak{g}$ es unimodular entonces $H^n(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g})) \cong U(\mathfrak{g})$ y cero en los demás grados. En general, $H^n(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g})) \cong U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g}^*$ y cero en los demás grados.

7. Muestre que $H^k(\mathfrak{g}, M) \cong H_{n-k}(\mathfrak{g}, \Lambda^n \mathfrak{g}^* \otimes M)$, donde $n = \dim_k(\mathfrak{g})$.

# 9. Estructura super, complejos, estructuras (co)algebraicas

## 9.1. Super álgebras de Lie

1. Super-Lie en términos usuales: Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 \oplus \mathfrak{L}_1$ una super álgebra de Lie. Llamemos

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{L}_0, \qquad V := \mathfrak{L}_1$$

Muestre que

- $\mathfrak{g}$ es álgebra de Lie (en el sentido usual)
- $V$ es un $\mathfrak{g}$-módulo con la acción

$$x \cdot v := [x, v]_{\mathfrak{L}}$$

- $\phi : V \times V \to \mathfrak{g}$ definido por

$$\phi(v, w) := [v, w]_{\mathfrak{L}}$$

es bilineal, *simétrica* e invariante (o sea $\phi(x \cdot v, w) + \phi(v, x \cdot w) = [x, \phi(v, w)]$) y verifica

$$(\star) \qquad \phi(v, w) \cdot u = \phi(u, v) \cdot w - \phi(u, w) \cdot v$$

- Recíprocamente, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $V$ un $\mathfrak{g}$-módulo, junto con una aplicación bilineal simétrica $\phi : V \times V \to \mathfrak{g}^{ad}$ y $\mathfrak{g}$-invariante que verifica $(\star)$, entonces $\mathfrak{L} := \mathfrak{g} \oplus V$ con el corchete

$$[(x, v), (y, w)] := ([x, y] + \phi(v, w), x \cdot w + y \cdot v)$$

es una super álgebra de Lie. Estas construcciones son recíprocas, es decir, toda super álgebra de Lie sucede en esta forma.

2. Sea $\mathfrak{L}$ una superálgebra de Lie. Un $\mathfrak{L}$-módulo es un super $k$-espacio vectorial (o sea, un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado) junto con una acción

$$\mathfrak{L} \otimes M \to M$$

$$x \otimes m \mapsto x \cdot m$$

que es un morfismo homogéneo de grado cero, o sea

$$\mathfrak{L}_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$$

y que verifica

$$x \cdot (y \cdot m) - (-1)^{|x||y|} y \cdot (x \cdot m) = [x, y]_{\mathfrak{L}} \cdot m$$

Si $\mathfrak{L}$ es superálgebra de Lie porque es $\mathbb{Z}$-graduada y $M$ es $\mathbb{Z}$-graduado, entonces la definición de $\mathfrak{L}$-módulo es "la misma", lo único es que en la condición $\mathfrak{L}_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$ se toman $i, j$ en $\mathbb{Z}$, y no en $\mathbb{Z}_2$.

   a) Escriba, para $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \oplus V$, la condición de ser $\mathfrak{L}$-módulo en términos de $\mathfrak{g}$ y $V$.

b) Si $\mathfrak{L} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathfrak{L}_n$ es superálgebra $\mathbb{Z}$-graduada y $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}M_n$ es un módulo $\mathbb{Z}$-graduado, escriba la condición de "ser $\mathfrak{L}$-módulo" en términos de las acciones de $\mathfrak{L}_i$.

3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie usual, llamemos $V := \mathfrak{g}^{ad}$. Consideramos la super-álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada dada por

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

con corchete $\mathbb{Z}$-graduado (o sea, $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathfrak{g}_2 = 0$ en este caso, similarmente $0 = [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}]$, $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathfrak{g}_0$, etc.) con componentes graduadas dadas por

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}_1 &= V = \mathfrak{g}^{ad} \\ \mathfrak{g}_{-1} &= kd \qquad \text{(el espacio 1-dimensional con base } d \end{aligned}$$

donde el corchete entre $\mathfrak{g}$ y $V$ es la acción de $\mathfrak{g}$ en $V = \mathfrak{g}^{ad}$. Sea $x \leftrightarrow x'$ una biyección $\mathfrak{g}$-lineal entre $\mathfrak{g}$ y $V = \mathfrak{g}^{ad}$ (por ejemplo la identidad) donde los $x$ los vemos en $\mathfrak{g} = \mathfrak{L}_0$ y $x' \in V = \mathfrak{L}_1$. Definimos el corchete

$$[d, x'] := x$$

Muestre que el dato anterior determina toda la estructura de super álgebra de Lie en

$$\mathfrak{L} = kd \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{ad} = \mathfrak{L}_{-1} \oplus \mathfrak{L}_0 \oplus \mathfrak{L}_1$$

Si $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ es un super $\mathfrak{L}$-módulo en el sentido $\mathbb{Z}$-graduado, describa el significado de "ser supermódulo" en términos de $\mathfrak{g}$ y $d$.

## 9.2. Super derivaciones

4. Muestre que el diferencial de Chevalley-Eilenberg en $\mathrm{Hom}(\Lambda^*\mathfrak{g}, k) \cong \Lambda^\bullet\mathfrak{g}^*$ es una super-derivación (de grado $+1$) con respecto al producto wedge en $\Lambda^*\mathfrak{g}$, por lo tanto, la cohomología es un álgebra (super-conmutativa).

5. Muestre que el diferencial de Hochschild es una super-derivación (de grado $+1$) con respecto al producto cup en $\oplus_n \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A)$.

6. Sea $A$ una superálgebra asociativa y $\mathrm{Der}_s(A) \subseteq \mathrm{End}(A)$ la suma directa de las super-derivaciones de todos los posibles grados. Muestre que $\mathrm{Der}_s(A)$ es estable por el super-conmutador.

7. Con mismas notaciones que el ej anterior, muestre que si $D$ es una (super)derivación impar, entonces $D^2$ es una derivación en el sentido usual.

8. Sea $A = \Lambda^\bullet V$ vista como superálgebra con la graduación dada por la cantidad de tensores. Si $D : A \to A$ es una super-derivación de grado $+1$, muestre que $D^2 = 0$ si y sólo si $D^2|_V : V \to \Lambda^3 V$ es cero.

9. Sea $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial de dimensión finita y $c : \Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ una aplicación lineal. Definimos $\delta : \mathfrak{g}^* \to \Lambda^2\mathfrak{g}^*$ la aplicación lineal traspuesta. Se define $\partial_\delta$ a la única super-derivación de grado $+1$ tal que $\partial_\delta|_{\mathfrak{g}^*} = \delta$, donde $\Lambda^\bullet\mathfrak{g}^*$ es super-conmutativa libre, $\partial_\delta$ está bien definida. Muestre que $\partial_\delta^2 = 0$ si y sólo si $c : \Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es un corchete de Lie, es decir, si denotamos $[x, y] := c(x \wedge y)$, entonces $\partial_\delta^2 = 0$ si y sólo si $[-,-]$ verifica Jacobi.

10. Sea $\mathfrak{g}$ una super-álgebra de Lie que sea $\mathbb{Z}$-graduada y $m \in \mathfrak{g}_1$ que verifique

$$[m, m] = 0$$

Notar que la ecuación es no trivial pues $m$ tiene grado impar.

- Muestre que
$$\partial := [m, -]$$
es un diferencial en $\mathfrak{g}$ (de grado $+1$), es decir, que $\partial^2 = 0$ ,
- $\partial$ es una super-derivación del álgebra de Lie,
- $Z_m = \{x \in \mathfrak{g} : [m, x] = 0\}$ es una subálgebra de Lie (Z por centralizador y por ciclos), y muestre que $B_m := \{x \in \mathfrak{g} : \exists y \ / \ x = [m, y]\}$ es un ideal de Lie de $Z_m$ (aunque en general no es un ideal de $\mathfrak{g}$) y por lo tanto $H_m(\mathfrak{g}) := \dfrac{Z_m}{B_m}$ resulta una superálgebra de Lie.

## 9.3. Coálgebras y coderivaciones

11. Una **coalgebra** sobre $k$ es un $k$-espacio vectorial junto con una aplicación (llamada comultiplicación) $\Delta : C \to C \otimes C$ y una counidad $\epsilon : C \to k$ que satisfacen los axiomas duales a los de álgebra, escritos en términos de diagramas conmutativos:

- coasociatividad:
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{Id}"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$
- counitariedad
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & C \otimes C \arrow[d, "\epsilon\otimes\mathrm{Id}"] \\ C \arrow[r, "\cong"] & k \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\epsilon"] \\ C \arrow[r, "\cong"] & C \otimes k \end{tikzcd}$$

12. Muestre que si $A$ es una $k$-álgebra de dimensión finita entonces $A^*$ es una coálgebra con $\Delta = m^*$ y $\epsilon = \mu^*$ donde $\mu : k \to A$ es la inclusión de $k$ en $A$. Si $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ y cada $A_n$ es de dimensión finita, entonces el dual graduado

$$C := A' := \oplus_{n\geq 0} A_n^*$$

es una coálgebra, que además es graduada en el sentido que $\Delta(C_n) \subseteq \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes C_q$.

13. Si $C$ es coálgebra, entonces $C^*$ siempre es un álgebra.

14. Sea $V$ un $k$-esp vectorial y $C = T^cV = \oplus_{n\geq 0}V^{\otimes n}$ el álgebra tensorial *pero la vemos como espacio vectorial*. Un elemento de $V^{\otimes n}$ lo escribimos como sumas de elementos de la forma $v_1 \cdots v_n$. Definimos la *deconcatenación* como

$$\Delta(v_1 \cdots v_n) = 1 \otimes v_1 \cdots v_n + v_1 \otimes v_2 \cdots v_n + \cdots + v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n + v_1 \cdots v_n \otimes 1$$

$$= \sum_{i=0}^{n} v_1 \cdots v_i \otimes v_{i+1} \cdots v_n \qquad \text{(por convención } v_0 = 1 = v_{n+1}\text{)}$$

Muestre que $C$ es coálgebra, graduada, con $\epsilon$=la proyección en $k$. Si $V$ es de dimensión finita, entonces $T^cV$ es isomorfa al dual graduado del álgebra $TV^*$.

15. Si $C$ es una coálgebra, se define *coderivación* como un morfismo $k$-lineal $D : C \to C$ que verifica
$$(D \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes D)\Delta = \Delta D$$
o equivalentemente, que $D^* : C^* \to C^*$ es una derivación. Muestre que $Coder(C) \subset \mathrm{End}_k(C)$ es subálgebra de Lie.

16. Si $C = \oplus_n C_n$ es una coálgebra graduada, un morfismo $k$-lineal $D$ de grado $p$ se dice super coderivación si $D^*$ es una super-derivación (de grado $-p$) de $C'$ (el dual graduado de $C$), o equivalentemente
$$(D \otimes \mathrm{Id} + \pm\mathrm{Id} \otimes D)\Delta = \Delta D$$
donde $\pm$Id es Id en los grados pares y $-$Id en los grados impares. Muestre que la suma de todas las super-coderivaciones es una super-álgebra de Lie.

17. Sea $A$ un $k$-espacio vectorial, consideramos la coálgebra graduada con la deconcatenación $T^cA$. Muestre que hay una correspondencia biyectiva entre
$$\mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) \cong Coder_{n-1}(T^cA)$$
donde $Coder_{n-1}(A)$ son las coderivaciones de grado $n-1$, en particular
$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) \cong Coder(T^cA)$$
es una superálgebra de Lie. **Observación:** Si $A$ tiene dimensión finita, esto es exactamente el enunciado dual-graduado de que $TA^*$ es el álgebra libre y por lo tanto $\mathrm{Der}(TA^*) \cong \mathrm{Hom}(A^*, TA^*)$.

18. Sea $f : A^{\otimes 2} \to A$, que lo vemos como un morfismo de grado -1 de $T^cA \to A$ (extendiendo por cero en los demás sumandos).
    - Explicite la coderivación asociada $D_f : T^cA \to T^cA$.
    - Si $f$ se llama $m$, muestre que $D_m^2 = 0$ si y sólo si $m$ es un producto asociativo.

- Si $(A,m)$ es una $k$-álgebra asociativa, muestre que el diferencial de Hochschild es (a menos de signo),
$$\partial = [m,-]$$
donde $[-,-]$ es el super corchete de Lie en $\mathrm{Hom}(T^cA,A) \cong Coder(T^cA)$. En particular, $HH^{\bullet-1}(A)$ es una superálgebra de Lie, o sea,
$$[HH^p, HH^q] \subseteq HH^{p+q-2}$$
y verifica super Jacobi con respecto al grado $p-1$ si un elemento esta en $HH^p$. En particular, $HH^1(A) = \mathrm{Der}(A)/Innder(A)$ es una subálgebra de Lie que es álgebra de Lie en el sentido usual, cosa que es obvia, pero $\mathrm{Der}(A)$ actúa en toda la cohomología (cosa que se podría adivinar porque $\mathrm{Aut}(A)$ actúa) y se deduce que $InnDer(A)$ actúa trivialmente (cosa que se podría imaginar porque $InnAut(A)$ actúa trivialmente). Pero más aún, el corchete da operaciones adicionales, por ejemplo $[HH^2, HH^2] \subseteq HH^3$, etc.

**Observación:** Si $\mathfrak{g}$ es un $k$-espacio vectorial de dimensión arbitraria, $\Lambda\mathfrak{g}$= los tensores completamente antisimétricos, $\Lambda\mathfrak{g}$ es una subcoálgebra de $T^c\mathfrak{g}$, y el diferencial de Chevalley en homología se puede definir como la única super coderivación de grado -1 tal que su restricción a $\Lambda^2\mathfrak{g}$ coincide con el corchete de Lie de $\mathfrak{g}$. Verifica que al cuadrado es cero si y sólo si el corchete $\Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ verifica Jacobi.

19. **El complejo $\mathcal{H}om$.** Sean $(X_\bullet, d_X)$, $(Y_\bullet, d_Y)$ dos complejos de $A$-módulos, se define el complejo Hom como el objeto graduado que en grado $n$ tiene
$$\mathcal{H}om_A(X,Y)_n := \prod_i \mathrm{Hom}_A(X_i, Y_{i+n}) = \{f : X \to Y \ / \ f(X_i) \subseteq Y_{i+n} \forall i$$
los "morfismos homogéneos de grado $n$". El diferencial está dado por
$$\partial(f) := d_Y \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_X$$
    a) Muestre que $\partial^2 = 0$, que los ciclos de grado 0 son los morfismos de complejos, y que la homología en grado cero son las clases de homotopía de morfismos de complejos.
    b) Muestre que
$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(X,Y)_n \subseteq \mathrm{Hom}_A(X,Y)$$
    (donde a la derecha $X = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} X_n$, $Y = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} Y_n$ son considerados como $A$-módulos, olvidando diferencial y graduación). En general la contención es estricta, salvo que por ejemplo $X$ tenga finitas componentes homogéneas no nulas.
    c) Sea $kd$ el álgebra de Lie 1-dimensional con generador $d$ y consideramos a $X$ y a $Y$ como $\mathfrak{g}$-módulos. Muestre que $\mathcal{H}om_A(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_k(X,Y)$ es un $\mathfrak{g}$-submódulo, y que la acción de $d$ en $\mathcal{H}om_A(X,Y)$ da justamente el diferencial.

## 9.4. Algebras de Poisson 0

Recordamos $(A, \cdot, \{,\})$ se dice un álgebra de Poisson si $A$ es un álgebra conmutativa, $(A, \{,\})$ es de Lie, y vale la identidad

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + \{a, c\}b$$

Si $M$ es una variedad diferenciable, $C^\infty(T^*M)$, las funciones en el cotangente, es el ejemplo clásico de álgebra de Poisson.

Si $A = k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ entonces

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} f \partial_{x_i} g - \partial_{x_i} f \partial_{y_i} g$$

es un ejemplo de álgebra de Poisson. Notar

$$\{x_i, x_j\} = 0 = \{y_i, y_j\}$$

$$\{y_i, x_j\} = \delta_{ij} = -\{x_j, y_i\}$$

En cierto sentido, el álgebra de Weyl es una deformación de $k[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n]$ en la dirección de este corchete de Poisson, dado por la siguiente construcción:

20. Sea $A$ una $k$-álgebra filtrada cuyo graduado asociado es conmutativo. Es decir, $A = \cup_p A_p$ con $A_p A_q \subseteq A_{p+q}$ pero que para cada $a \in A_p$ y $b \in A_q$,

$$ab - ba \in A_{p+q-1}$$

Muestre que $gr(A)$ es un álgebra de Poisson (que además es homogéneo) con el corchete dado por, si $a \in A_p$, $b \in A_q$:

$$\{\overline{a}, \overline{b}\} := \overline{ab - ba} \; Mod \; p + q - 1$$

El ejemplo del álgebra de Weyl, con la filtración por grado de operador diferencial, da la estructura de Poisson standard en $k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$.

21. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, entonces $S(\mathfrak{g})$= el álgebra simétrica en $\mathfrak{g}$ admite un único corchete de Poisson tal que

$$\{x, y\} = [x, y] \; \forall \qquad x, y \in \mathfrak{g}$$

Sugerencia: $S(\mathfrak{g}) \cong gr(U(\mathfrak{g}))$

## 9.5. Una super álgebra de Possion

Si $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial de dimensión finita, se considera el álgebra superconmutativa libre

$$\Lambda := \Lambda(\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}) = \Lambda(\mathfrak{g}^*) \widehat{\otimes} \Lambda(\mathfrak{g})$$

Con la bigraduación
$$\Lambda = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q} = \bigoplus_{p,q} \Lambda^p \mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^q \mathfrak{g}$$
Pero conideramos la graduación en $\mathbb{Z}$ dada por un corrimiento de la graduación total:
$$\boxed{|\Lambda^{p,q}| = p + q - 2}$$
De esta forma, por ejemplo $\Lambda \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ está en grado 0.

El super corchete de Lie $\{-.-\} : \Lambda^{p,q} \times \Lambda^{r,s} \to \Lambda^{p+r-1,q+s-1}$ se define como el único determinado por:
$$\{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\} = 0 = \{\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}^*\}$$
$$\{a_{p,q}, b_{r,s}\} = -(-1)^{(p+q)(r+s)}\{b, a\} = -(-1)^{|a||b|}\{b, a\}$$
$$(**) \qquad \{a_{p,q} b_{r,s}, c_{t,u}\} = a_{p,q}\{b_{r,s}, c_{t,u}\} + (-1)^{|a||b|} b_{r,s}\{a_{p,q}, c_{t,u}\}$$
Y si $\phi \in \mathfrak{g}^*$, $x \in \mathfrak{g}$, entonces
$$\{\phi, x\} = \phi(x) = \{x, \phi\}$$
Por ejemplo, si $D, E \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, escribimos
$$D = \sum_i \phi_i \otimes x_i, \qquad E = \sum_j \psi_i \otimes y_j$$
entonces (chequear los pasos y completar)
$$\{D, E\} = \sum_{i,j} \{\phi_i \otimes x_i, \psi_j \otimes y_j\} = \sum_{i,j} \phi_i \otimes \{x_i, \psi_j \otimes y_j\} - x_i \otimes \{\phi_i, \psi_j \otimes y_j\}$$
$$= \sum_{i,j} \psi_j(x_i)\phi_i \otimes y_j - \phi_i(y_j) x_i \otimes \psi_j = E \circ D - D \circ E$$
Es decir, $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ es una subalgebra de Lie, isomorfa a $\mathrm{End}(\mathfrak{g})^{op}$.

22. Mostrar que efectivamente el supercorchete de Lie así definido verifica super-Jacobi. *Sugerencia: muestre a mano Jacobi en grados bajos y use la condicón (**) mas inducción en el grado para grados altos.*

    **Observación:** Si $c\colon \Lambda^2 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, lo identificamos con un elemento $c \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$, por lo tanto
    $$\{c, -\} : \Lambda^p \mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^q \mathfrak{g} \to \Lambda^{p+1} \mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^q \mathfrak{g}$$
    y es una derivacion con el producto wedge (porque es super-Poisson).

23. Muestre que para $q = 0$, $\{c, -\}$ da una derivación en $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$. Muestre que es de cuadrado cero si y sólo si $c$ es un corchete de Lie, y en ese caso, da el diferencial de Chevalley Eilenberg de $(\mathfrak{g}, c)$ que calcula $H^\bullet(\mathfrak{g}_c, k)$.

24. Muestre en general que si $c$ es un corchete de Lie entonces $\{c, -\}$ es el diferencial de Chevalley Eilenberg del álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, c)$ a coeficientes en $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}$, en el sentido que si $f : \Lambda^p \mathfrak{g} \to \Lambda^q \mathfrak{g}$ lo identificamos con un elemento de $\Lambda^p \mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^q \mathfrak{g}$, entonces

$$\{c, f\} \in \Lambda^{p+1}\mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^q \mathfrak{g} \cong \mathrm{Hom}(\Lambda^{p+1}\mathfrak{g}, \Lambda^q \mathfrak{g})$$

se corresponde con $\partial f$.

25. Notar que como $c \in \Lambda^{2,1}$, entonces $\{c, \mathfrak{g}\} = \{c, \Lambda^{0,1}\} \subseteq \Lambda^{1,1}$ y $\{\{c, \mathfrak{g}\}, \mathfrak{g}\} \subseteq \mathfrak{g}$. Muestre la fórmula

$$\{\{c, x\}, y\} = [x, y]_c$$

26. Concluya que $\bigoplus_n H^n(\mathfrak{g}, \Lambda^n \mathfrak{g})$ es una super-álgebra de Poisson, es decir, tiene un producto super-conmutativo y un super-corchete de Lie, que deriva al producto asociativo.

# 10. Álgebras de Koszul

1. Sea $A = k_q[x, y] = k\langle x, y | xy = qyx\rangle$, o sea $V = kx \oplus ky$, $R = k(x \otimes y - qy \otimes x)$.

   *a*) Consideramos $X, Y \in V^*$ la base dual de $\{x, y\}$. Muestre que $R^0$ está generado por $\{X \otimes X, Y \otimes Y, X \otimes Y + q^{-1} Y \otimes X\}$ y que por lo tanto

   $$A^! = k\langle X, Y | X^2 = 0 = Y^2, XY = q^{-1} Y X\rangle$$

   $A^!$ tiene dimensión finita (4) y su componente de grado máximo es 2, por lo tanto el complejo de Koszul de $A$ tiene longitud 2.

   *b*) Usando que $k_q[x, y]$ es libre sobre $k$ con base los monomios ordenados $\{x^i y^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$, muestre que el complejo de Koszul

   $$0 \to k_q[x, y] \otimes (x \otimes y - qy \otimes x) \to A \otimes x \oplus A \otimes y \to A \to k \to 0$$

   es exacto, y por lo tanto $k_q[x, y]$ es un álgebra de Koszul.

   *c*) Calcule $\mathrm{Tor}_n^A(k, k)$ y $\mathrm{Ext}_A^n(k, k)$

2. Para las siguientes álgebras, Calcule $A^!$. Calcule las dimensiones de $A_2^!$ y $A_3^!$. Escriba explícitamente el complejo de Koszul hasta grado 3:

   $$A \otimes R_3 \to A \otimes R \to A \otimes V \to A \to k \to 0$$

   *a*) $A = k\langle x, y\rangle/(xy, yx)$.

   *b*) $A = k\langle x, y\rangle/(x^2 = y^2, xy = yx)$.

   *c*) $A = k\langle x, y\rangle/(x^2, yx)$ (ésta no es Koszul!).

3. Sea $A = TV/(R)$, llamemos $R(A) = \bigoplus_n R_n$. Observemos que el diferencial

   $$d_A : A \otimes R_n \to A \otimes R_{n-1}$$

es homogeneo de grado cero si consideramos el grado total en $A \otimes R_n$, o sea,

$$d_A| : A_p \otimes R_n \to A_{p+1} \otimes R_{n-1}$$

Usando que $R_n^* = A^!_n$ y que $A_n^* = R_n(A^!)$ (identificando $V$ con $V^{**}$), muestre que la traspuesta da el diferencial de $A^!$ cuando se hace el complejo de Koszul a derecha, más precisamente

$$\begin{tikzcd}
A_{p+1}^* \otimes R_{n-1}^* \arrow[r, "(d_A|)^*"] \arrow[d, equal] & A_p^* \otimes R_{n-1}^* \arrow[d, equal] \\
R(A^!)_{p+1} \otimes A^!_{n-1} \arrow[r, "d_{A^!}"] & R(A^!)_p \otimes A^!_n
\end{tikzcd}$$

concluya que $A \otimes R_\bullet(A)$ es una resolución de $k$ como $A$-módulo a izquierda si y sólo si $R_\bullet(A^!) \otimes A^!$ e suna resolución de $k$ como $A^!$-módulo a derecha y por lo tanto $A$ es Koszul (a izquierda) si y sólo si $A^!$ es Koszul (a derecha).

(Veremos luego que $A$ es Koszul a izq $\iff$ lo es a derecha)

4. Muestre que $\mathrm{Ext}^\bullet_{\Lambda V}(k,k) \cong S(V^*)$, y que $\mathrm{Ext}^\bullet_{k \oplus V}(k,k) \cong T(V^*)$.

## 10.1. La serie de Hilbert y la de Poincaré

En esta sección, $k$ es un cuerpo.

**Definición 10.1.** $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ un $k$-esp vect graduado tal que $\dim_k(A_n) < \infty \forall n$, su **serie de Hilbert** se define como

$$Hilb(A)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k(A_n) t^n \qquad \in \mathbb{Z}[[t]]$$

Si $A$ es una $k$- álgebra aumentada se define su **serie de Poincaré** como

$$P(A)(t) = \sum_{n \geq 0} \dim_k(\mathrm{Ext}^n_A(k,k)) t^n \qquad \in \mathbb{Z}[[t]]$$

*Observación* 10.2. Si $A$ es Koszul, entonces $P(A)(t) = Hilb(A^!)(t)$.

**Definición 10.3.** Si $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ es espacio vectorial graduado un complejo de espacios vectoriales con $\dim_k \left( \bigoplus_n M_n \right) < \infty$, se define su característica de Euler como

$$\chi(M) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim_k M_n \qquad \in \mathbb{Z}$$

5. Sea $(M,d)$ un complejo de $k$-esp. vect. con $\dim_k \left( \bigoplus_n M_n \right) < \infty$, muestre que

$$\chi(M) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim_k M_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim_k H_n(M_\bullet, d) = \chi(H_\bullet(M,d))$$

6. $\dim_k V < \infty$, $R \subseteq V^{\otimes 2}$ y $A = TV/(R)$ un álgebra de Koszul. Mostraremos que

$$Hilb(A)(t) \cdot P(A)(-t) = Hilb(A)(t) \cdot Hilb(A^!)(-t) = 1$$

Para esto, chequeamos lo siguiente:

*a*) Si $A$ es cuadrática (no necesariamente Koszul) y en el complejo de Koszul

$$K(A) = (\cdots \to A \otimes A^{¡}_i \to A \otimes A^{¡}_{i-1} \to \cdots)$$

consideramos la graduación

$$A \otimes A^{¡}_i = \Big(\bigoplus_{p \geq 0} A_p\Big) \otimes A^{¡}_i$$

$$a \in A_p, r \in A^{¡}_i = R_i \Rightarrow |a \otimes r| = p + i$$

entonces el diferencial es homogéneo de grado cero.

*b*) El complejo de Koszul es una suma directa de subcomplejos

$$(K(A), d) = \bigoplus_{m \geq 0} (K(A)_m, d_m)$$

donde $K(A)_m$ es el la parte homogénea de grado $m$:

$$K(A)_m = (\cdots \to A_{m-i} \otimes A^{¡}_i \to A_{m+1-i} \otimes A^{¡}_{i-1} \to \cdots)$$

*c*) Si $A$ es Koszul, entonces

$$\forall m: \qquad \chi(K(A)_m) = \chi((A \otimes R_\bullet)_m) = \sum_n (-1)^n \dim_k \Big(A_{m-n} \otimes R_n\Big)$$

$$= \sum_n (-1)^n \dim_k (H_n(A \otimes R_\bullet, d)_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Concluimos

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{m \in \mathbb{N}_0} t^m \left( \sum_n (-1)^n \dim_k (H_n(A \otimes R_\bullet, d)_m) \right) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N}_0} t^m \left( \sum_n (-1)^n \dim_k (A_{m-n} \otimes R_n) \right) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N}_0} t^m \left( \sum_n (-1)^n \dim_k (A_{m-n}) \cdot \dim_k (A^!_n) \right) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N}_0} \sum_n \dim_k (A_{m-n}) t^{m-n} \cdot \dim_k (A^!_n)(-t)^n \\
&= \Big( \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \dim_k (A_n) t^n \Big) \cdot \Big( \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \dim_k (A^!_n)(-t)^n \Big) \\
&= Hilb(A)(t) \cdot Hilb(A^!)(-t) = Hilb(A)(t) \cdot P(A)(-t)
\end{aligned}$$

Como corolario:

7. Si $A$ es cuadrática y $Hilb(A)(t) \cdot Hilb(A^!)(-t) \neq 1$ entonces $A$ no puede se Koszul.

8. Sea $V$ con $\dim V = n$, calcular la serie de Hilbert de $S(V)$, $\Lambda(V)$, $TV$, $k \oplus V$ y verificar la igualdad anterior. (Notar que la serie de Hillbert de $k_q[x,y]$ es la misma que la de $k[x,y]$.)

9. Calcule $Hilb(A)(t)$ y $Hilb(A^!)(-t)$ para $A = k\{x,y\}/(x^2)$.

10. Muestre que $A = k\{x,y\}/(x^2, xy)$ "pasa el test" de la serie de Hilbert, sin embargo no es Koszul, por lo tanto la propiedad es necesaria pero no suficiente en general.

11. Para el interesado, bibliografía sobre chequeo de Koszulidad sepuede ver en Sección 4.1 y 4.3 de [JL.L. Loday - B. Vallette, *Algebraic Operads*]

    `https://www.math.univ-paris13.fr/~vallette/Operads.pdf`

    Otra biobliografía relevante para bases:

    [G. M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Adv. inMath. 29 (1978), no. 2, 178–218.

## 10.2. Operaciones entre álgebras cuadráticas

En esta sección, $k$ es un cuerpo, las álgebras serán finitamente generadas como álgebras.

12. Llamemos c-alg la categoría de álgebras cuadráticas, es decir, lo objetos son álgebras presentadas de la forma $A = TV/(R)$ con $R \subseteq V^{\otimes 2}$, y los morfismos son morfismos de $k$-álgebras que respetan el grado.

    *a*) Si $A = TV/R$, $B = TW/S$, entonces
    $$\mathrm{Hom}_{c-alg}(A,B) \cong \{f : V \to W : (f \otimes f)(R) \subseteq S \ (\subseteq W \otimes W)\}$$

    *b*) La operación $(-)^!$ es un funtor contravariante, en la categoría de álgebras cuadráticas finitamente generadas, es decir, si $f : A \to B$ es un morfismo de álgebras cuadráticas, entonces $(f|_V)^* : W^* \to V^*$ induce un morfismo $B^! \to A^!$, que llamamos $f^!$, donde claramente $\mathrm{Id}^! = \mathrm{Id}$, y además $(fg)^! = g^! f^!$

13. Sean $A$ y $B$ dos álgebras cuadráticas. Si $A = TV/(R)$ y $B = TW/(S)$, escriba las relaciones que hay que poner en $T(V \oplus W)$ para obtener $A \otimes B$, en particular, $A \otimes B$ también resulta cuadrática.

14. Sean $A$ y $B$ dos álgebras cuadráticas, en particular son graduadas. Muestre que $A \widehat{\otimes} B$ también es cuadrática, donde $A \widehat{\otimes} B = A \otimes B$ como espacio vectorial, pero el producto está dado por
    $$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|} aa' \otimes bb'$$
    (donde $b$ y $a'$ se suponen homogéneos). Más precisamente, exhiba el subespacio de relaciones en términos de las relaciones de $A$ y de $B$.

15. Muestre que si $(A \otimes B)^! = A^! \widehat{\otimes} B^!$

16. Muestre que si $A$ y $B$ son de Koszul, entonces $A \otimes B$ y $A \widehat{\otimes} B$ también lo son.

## 10.3. Productos de Manin

Si $V_1, V_2, V_3, V_4$ son cuatro espacios vectoriales, denotaremos (23) la transformación lineal que permuta los factores 2,3:

$$(23) : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes V_4 \to V_1 \otimes V_3 \otimes V_2 \otimes V_4$$

$$x \otimes y \otimes z \otimes t \mapsto x \otimes z \otimes y \otimes t$$

Si $A = TV/R$, $B = TW/S$, $U := V \otimes W$, se definen

$$A \bullet B := T(V \otimes W)/((23)(R \otimes S))$$

$$A \circ B := T(V \otimes W)/((23)(R \otimes W^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 2} \otimes S))$$

Notar que existe un morfismo canónico $A \bullet B \to A \circ B$

17. $A \bullet B = \bigoplus_n (A_n \otimes B_n)$

18. Muestre que
$$(A \bullet B)^! = (A^! \circ B^!)$$
$$(A \circ B)^! = (A^! \bullet B^!)$$

19. Tanto $\bullet$ como $\circ$ son asociativos, el álgebra $k[x]$ es el neutro para $\bullet$ y $k[x]/(x^2)$ es el neutro para $\circ$, es decir,
$$A \bullet (B \bullet C) \cong (A \bullet B) \bullet C$$
$$k[x] \bullet A \cong A \cong A \bullet k[x]$$

$$A \circ (B \circ C) \cong (A \circ B) \circ C$$
$$k[x]/(x^2) \circ A \cong A \cong A \circ k[x]/(x^2)$$

20. Calcule los generadores y relaciones de $A^! \circ A$ para $A = k[x, y]$, $k_q[x, y]$ y $TV$

21. **Hecho:** *si $A$ y $B$ son Koszul, $A \bullet B$ y $A \circ B$ también lo son.* [J. Backelin and R. Fröberg, *Koszul algebras, Veronese subrings and rings with linear resolutions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl.30(1985), no. 2, 85–97. 86]

22. Muestre que existe un isomorfismo canónico
$$\mathrm{Hom}_{c-alg}(A \bullet B^!, C) = \mathrm{Hom}_{c-alg}(A, B \circ C)$$

23. (las biálgebras de Manin) Sea $A = TV/(R)$ un álgebra cuadrática $x_1, \dots, x_n$ una base de $V$, $x^1, \dots, x^n$ su base dual, llamamos $t^i_j = x^i \otimes x_j \in V^* \otimes V$, notar que $\{t^i_j : i, j = 1, \dots n\}$ es una base de $V^* \otimes V$.

*a*) Muestre que el morfismo

$$\Delta : V^* \otimes V \to (V^* \otimes V) \otimes (V^* \otimes V)$$

$$t^i_j \mapsto \sum_{k=1}^{n} t^i_k \otimes t^k_j$$

es independiente de la base $x_1, \ldots, x_n$ elegida.

*b*) Denotemos $end(A) := A^! \bullet A$, muestre que $\Delta$ determina un morfismo de álgebras que es coasociativo y counitario

$$\Delta : end(A) \to end(A) \otimes end(A)$$

# 11. Construcción bar y cobar

## 11.1. Resolución standard normalizada

Sea $A$ una $k$-álgebra y denotamos $\overline{A} = A/k.1$, es un $k$-módulo. Mostraremos que $b'$ queda bien definido en $(A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A)$ y que la proyección induce un quasi isomorfismo

$$(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A, b') \to (A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A, \overline{b}')$$

1. Consideremos el módulo graduado (el morfismo es el inducido por la inclusión $k \subset A$ en el lugar correspondiente)

$$\begin{tikzcd}
\cdots & A \otimes A^{\otimes 2} \otimes k \otimes A \arrow[d, hook] & A \otimes A \otimes k \otimes A \arrow[d, hook] & A \otimes k \otimes A \arrow[d, hook] & A \otimes A \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\
\cdots \arrow[r, "b'"] & A \otimes A^{\otimes 3} \otimes A \arrow[r, "b'"] & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b'"] & A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b'"] & A \otimes A \arrow[r, "b'"] & A
\end{tikzcd}$$

   Muestre que es un subcomplejo.

2. Muestre que el conúcleo de la inclusión anteior está dada por

$$a \otimes b \otimes 1 \otimes c \longmapsto ab \otimes 1 \otimes c$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^{\otimes 2} \otimes k \otimes A \arrow[r, "b'|"] \arrow[d, hook] & A \otimes A \otimes k \otimes A \arrow[r, "b'|"] \arrow[d, hook] & A \otimes k \otimes A \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "b'"] & A \otimes A^{\otimes 3} \otimes A \arrow[r, "b'"] \arrow[d] & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b'"] \arrow[d] & A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b'"] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[r, "b'"] \arrow[d] & A \\
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^{\otimes 2} \otimes \overline{A} \otimes A \arrow[r, "\overline{b}'"] & A \otimes A \otimes \overline{A} \otimes A \arrow[r, "\overline{b}'"] & A \otimes \overline{A} \otimes A \arrow[r, "\overline{b}'"] & A \otimes A \arrow[r, "\overline{b}'"] & A
\end{tikzcd}$$

   Muestre que hay un isomorfismo obvio entre el subcomplejo

$$\cdots \longrightarrow A \otimes A^{\otimes 2} \;\otimes\; k \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \;\otimes\; k \otimes A \xrightarrow{b'} A \;\otimes\; k \otimes A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

y la resolución de $A$ tensorizada con $k$ y $A$ (con diferencial $b' \otimes \mathrm{Id}_k \otimes \mathrm{Id}_A$) :

$$\Big( \cdots \longrightarrow A \otimes A \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{b'} A \xrightarrow{m} 0 \longrightarrow 0 \Big) \otimes k \otimes A$$

Concluya que este subcomplejo es acíclico y por lo tanto la proyección es un quasi-isomorfismo

3. Por simplicidad escribiremos $V^n$ en lugar de $V^{\otimes n}$. Supongamos inductivamente que la proyección da un quasi-isomorfismo para un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^{n_0+2} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A^{n_0+1} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A^{n_0} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & A \otimes A^2 \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[d, equal] \\
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^2 \otimes \overline{A}^{n_0} \otimes A \arrow[r] & A \otimes A \otimes \overline{A}^{n_0} \otimes A \arrow[r] & A \otimes \overline{A}^{n_0} \otimes A \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A \otimes \overline{A}^2 \otimes A \arrow[r] & A \otimes \overline{A} \otimes A \arrow[r] & A \otimes A
\end{tikzcd}$$

Si al complejo de abajo lo llamamos $C_{n_0}(A)$, calcule el núcleo del morfismo natural $C_{n_0} \to C_{n_0+1}$ que proyecta $A$ en $\overline{A}$ en el factor correspondiente (a partir del lugar $n_0+1$). Calcule $b'$ restringido a ese núcleo (recuerde que $\overline{1} = 0$ en $\overline{A}$) y concluya que ese subcomplejo núcleo es acíclico, con un argumento similar al punto anterior.

4. Concluya que $H_\bullet(A, M) = H_\bullet(M \otimes A^{\otimes \bullet}) \cong H_\bullet(M \otimes \overline{A}^{\otimes \bullet})$ y similarmente para cohomología, si $C^n(A, M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$, el siguiente es un subcomplejo

$$\overline{C}^n(A, M) = \mathrm{Hom}(\overline{A}^{\otimes n}, M)$$

$$= \{ f : A^{\otimes n} \to M : f(a_1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots a_n) = 0 \}$$

= las funciones que dan cero si por lo menos uno de los factores es un 1. Se llama el complejo normalizado, y calcula la misma cohomología.

## 11.2. La construcción bar

La siguiente es una construcción que a toda álgebra aumentada $\epsilon : A \to k$ le asigna una coálgebra diferencial graduada

**Definición 11.1.** Sea $\epsilon : A \to k$ un morfismo de álgebras que consideramos fijado, luego $k$ es un $A$-módulo vía $\epsilon$. Notar que $A = k1 \oplus \mathrm{Ker}\epsilon$ como $k$-módulo, luego $\overline{A} = A/k1 \cong \mathrm{Ker}\epsilon$. De aquí en adelante, como $\epsilon$ está fijo, denotamos $\overline{A} := \mathrm{Ker}\epsilon$.

Definimos $B(A) := T^c\overline{A}$ la coálgebra tensorial en $\overline{A}$ con la deconcatenación como comultiplicación

$$\Delta(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_i \otimes a_{i+1}|\cdots|a_n \in T^c\overline{A} \otimes T^c\overline{A}$$

donde hemos denotado $|$ al producto tensorial interno de $T^cA$ (ese es el origen del nombre “construcción bar”), y por convención en esa suma $a_0 = 1 = a_{n+1}$. Por ejemplo, si $a|b|c \in \overline{A}^{\otimes 3} \subset T^c\overline{A}$,

$$\Delta a|b|c = 1 \otimes a|b|c + a \otimes b|c + a|b \otimes c + a|b|c \otimes 1$$

5. Muestre que si consideramos la graduación $deg\overline{A} = 1$, entonces $b'$ es una super co-derivación, donde

$$b'(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_ia_{i+1}|\cdots|a_n$$

Observar que ya sabíamos que $b'^2 = 0$.

6. Muestre que $H_\bullet(T^c\overline{A}, b') = \mathrm{Tor}^A_\bullet(k,k)$ es naturalmente una coálgebra.

7. Si $A = TV/(R)$ es cuadrática Koszul, entonces la inclusión

$$\begin{tikzcd} R_\bullet \arrow[r, equal] \arrow[rrr, bend left] & A^{¡} \arrow[r, hook] & T^cV \arrow[r, hook] & (T^c\overline{A}, b') \end{tikzcd}$$

es un quasi-isomorfismo, donde a $R_\bullet$ se la considera una coálgebra d.g. con $d = 0$.

8. Si $A = TV/(R)$ es cuadrática y la inclusión anterior es un quasi-isomorfismo, entonces $A$ es Koszul.

## 11.3. Construcción cobar

Dualmente a la construcción bar, a toda coálgebra co-aumentada le asignaremos un álgebra d.g.

**Definición 11.2.** Sea $C$ una coálgebra sobre $k$, diremos que es co-aumentada si se tiene dado un morfismo de coálgebras $k \to C$, es decir, si $C$ tiene un elemento $e$ tal que $\Delta e = e \otimes e$. De aquí en adelante fijaremos una coálgebra coaumentada y su coaumentación.

Notar que por counitariedad, si $\epsilon : C \to k$ es la counidad, necesariamente $\epsilon(e) = 1$, y por lo tanto tenemos una descomposición como $k$- eesp. vectoriales

$$C \quad = \quad \overline{C} \quad \oplus \quad ke$$

$$c \mapsto (c - \epsilon(c)e) + \epsilon(c)e$$

donde $\overline{C} = \mathrm{Ker}\epsilon$. Se define

$$\Omega(C) := T\overline{C}$$

el **álgebra** tensorial en $\overline{C}$. Es graduada poniendo $\deg \overline{C} = 1$. Recordar que $(C, \Delta_C)$ es una coálgebra. Se define $d_\Delta : \overline{C} \to \overline{C} \otimes \overline{C}$ de la siguiente forma: si

$$\Delta c = \sum_i c_i' \otimes c_i'' \qquad \in C \otimes C$$

entonces se define

$$d_\Delta c = \sum_i (c_i' - \epsilon(c_i')e) \otimes (c_i'' - \epsilon(c_i'')e \qquad \in \overline{C} \otimes \overline{C}$$

9. Muestre (sugerencia: use el axioma de la counidad de $C$) que

$$d_\Delta c = \Delta c - e \otimes c - c \otimes e$$

10. Considerando $\overline{C}\otimes\overline{C} \subset T\overline{C}$ como subespacio, muestre que $d_\Delta$ se extiende de manera única a una super-derivación (de grado $+1$) que coincide con $d_\Delta$ en los generadores.

$$d_\Delta : T\overline{C} \to T\overline{C}$$

11. Muestre que $d_\Delta^2 = 0$ si y sólo si $\Delta$ es coasociativa.

    Se denomina *construcción cobar* de la coálgebra $C$ a la $k$-álgebra diferencial graduada

$$\Omega(C) = (T\overline{C}, d_\Delta)$$

12. Sea $A = TV/(R)$ y $C = R_\bullet = A^{¡} \subseteq T^cV = \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$. Notar que $C$ es coaumentada con $e = 1$, $\overline{C} = V \oplus R \oplus \cdots$. Considermos $\overline{C} \to V$ la proyección en el sumando $V$. Se define $\Omega(C) \to C$ por la composición

$$\begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[r, equal] \arrow[rrrr, bend left] & T\overline{C} \arrow[r, two heads] & TV \arrow[r, two heads] & TV/(R) \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

    Mostrar que es un morfismo de álgebras diferenciales graduadas, donde $A$ se la considera d.g. con su graduación habitual y con diferencial nulo.

13. Sea $A = TV$ (o sea, $R = 0$), describa el morfismo anterior en este caso:

$$\begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[r, equal] \arrow[rrrr, bend left] & T\overline{C} \arrow[r, two heads] & TV \arrow[r, two heads] & TV/(R) \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

14. Lo mismo que el ejercicio anterior pero para $A = k[x]/(x^2) = T(kx)/(x\otimes x)$. Calcule $d_\Delta$ y $H_\bullet(\Omega(C))$ de manera directa.

15. Supongamos $\dim V < \infty$.

    Notar que en cada grado $n$, $\dim A_n < \infty$ y $\Omega(A^{¡})_n = \overline{A}^{¡\otimes n}$ es a su vez bi-graduado teniendo en cuenta la graduación interna de $\overline{A}^{¡} = V \oplus R \oplus \cdots$. consideramos $A$ bi-graduada con una bi-graduación concentrada $A_n$ en el lugar $(n, n)$

    *a*) en cada bigrado $(n, m)$ ambas álgebras ($\Omega(A^{¡})$ y $A$) tienen componentes de dimensión finita, y por lo tanto podemos considerar sus duales (bi)graduados (los llamaremos $(-)'$ en vez de $(-)^*$).

    *b*) $(\Omega(A^{¡})', d_\Delta^*) = (B(A^!), b')$. *Sugerencia: en vez de demostrar esta versión, es más cómodo mostrar que*

$$B(A^!)' \cong \Omega(A^{¡})$$

    *(iso de álgebras graduadas) y en vez de mostrar que $d_\Delta^* = b'$ es más fácil ver que $b'^* = d_\Delta$ pues siendo una (super) derivación, basta ver que coincide en $\overline{A}^{¡} \subset T\overline{A}^{¡} = \Omega(A^{¡})$. También, cambiando $A$ por $A^!$, como $A^{!!} = A$, se puede demostrar equivalentemente el siguiente iso de duales bi-graduados:*

$$B(A)' \cong \Omega(A')$$

*c*) El morfismo $\Omega(A^{¡}) \to A$ es un q-iso si y solo si su dual (bi)graduado

$$A' \to (B(A^!), b')$$

si y sólo $A^!$ es Koszul (si y sólo si $A$ es Koszul)

# 12. Categorías derivadas

## Mapping cylinder

1. Si $u : X \to Y$, se define $cyl(f)_n = X_n \oplus X_{n-1} \oplus Y_n$ con diferencial

$$d(x, x', y) = (dx + x', -dx', dy - u(x))$$

   *a*) Muestre que $d^2 = 0$.

   *b*) En el caso $u = \mathrm{Id}_X$,

      1) muestre que $cyl(X) := cyl(\mathrm{Id}_X)$ es homotópicamente equivalente a $X$.

      2) $\phi : cyl(X) \to Y$ es un morfismo de complejos $\iff$ $\phi$ es de la forma

$$\phi(x, x', x'') = f(x) + h(x') + g(x'')$$

      donde $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(M, N)$ y $h : X[-1] \to Y$ es una homotopía entre $f$ y $g$, es decir,

$$f - g = dh + hd$$

2. $i_1 : X \to cyl(X)$, $x \mapsto (x, 0, 0)$ es un morfismo de complejos, también $i_2 : X \to cyl(X)$, $x \mapsto (0, 0, x)$. Las proyecciones $p_i : cyl(X) \to X$ dadas por $p_1(x, x', x'') = x$ y $p_(x, x', x'') = x''$ *no son morfismso de complejos*, sin embargo,

$$p : cyl(X) \to X$$

$$(x, x', x'') \mapsto x + x''$$

sí es un morfismo de complejos, y se tiene $p \circ i_1 = \mathrm{Id}_X = p \circ i_2$. Muestre que tanto $i_1 \circ p$ como $i_2 \circ p$ son homotópicas a la identidad de $cyl(X)$.

## Triángulos

Reccordar que llamamos **triángulo** en $\mathcal{H}(A)$ a una terna

$$(X, Y, Z, u : X \to Y, v : Y \to Z, w : Z \to X[-1])$$

que sea isomorfa a un cono, más precisamente, un triángulo en $\mathcal{H}(A)$ es a toda terna donde exista un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal, "a"', "\cong"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal, "b"', "\cong"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal, "c"', "\cong"] & X[-1] \arrow[d, equal, "a[-1]"', "\cong"] \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & Co(f) \arrow[r] & M[-1]
\end{tikzcd}$$

donde los cuadrados conmutan a menos de homotopía y $a, b, c$ son equivalencias homotópicas. Recordamos $Co(f) = N \oplus M[-1]$ con diferencial

$$d(n, m) = (dn + f(m), -dm)$$

Un triángulo que directamente sea un cono se lo llamará *distinguido*.

Los triángulos en $D(A)$ son la menor clase de uplas cerrada por isomorfismo que contienen a los triángulos distinguidos.

3. Muestre que la suma directa de triángulos es triángulo.

4. Sea $A$ es $k$-álgebra, $M \in \mathrm{Chain}(A)$, $V \in \mathrm{Chain}(k)$, definimos $M \otimes V$ con la estructura diferencial usual y la estructura de $A$-módulo dada por $M$. Muestre que

    - Si $f : M \to N$ es un morfismo de complejos, entonces

$$(M \otimes V)[-1] \cong M[-1] \otimes V, \qquad Co(f \otimes \mathrm{Id}_V) \cong Co(f) \otimes V, \qquad cyl(f \otimes \mathrm{Id}_V) \cong cyl(f) \otimes V,$$

    - Si $X \to Y \to Z \to X[\text{-}1]$ es triang. en $\mathcal{H}(A) \Rightarrow X \otimes V \to Y \otimes V \to Z \otimes V \to X[\text{-}1] \otimes V$ también. Si $k$ es cuerpo (o los $V_n$ son $k$-playos) y se tenía un triang. en $D(A)$ $\Rightarrow X \otimes V \to Y \otimes V \to Z \otimes V \to X[\text{-}1] \otimes V$ también $\Delta$ en $D(A)$.
    - Si $f \sim_h g$ son dos morfismos homotópicos, entonces $f \otimes \mathrm{Id}_V \sim g \otimes \mathrm{Id}_V$

5. Muestre que si $(X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[\text{-}1])$ es un triángulo, sus trasladados

$$(Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[\text{-}1] \overset{-u}{\longrightarrow} Y[\text{-}1]) \qquad \text{y} \qquad (Z[1] \overset{-w}{\longrightarrow} X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z)$$

    también lo son. (el primer caso lo hicimos en clase, hacer el segundo)

6. Denotamos por la misma letra $A$ al complejo de $A$-módulos concentrado en grado cero con componente 0 igual a $A$. Muestre que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M[n]) \cong H_n(M)$ (iso de funtores).

7. Sea $x \in A$ un elemento central, cómo podría describir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A/(x), M[n])$?

8. Sea $x \in A$ un elemento central y $C := Co(A \overset{x}{\to} A)$ (donde identificamos un morfismo de $A$-módulos con un morfismo de complejos concentrados en grado cero, notar que el cono no está concentrado en grado cero), describa lo más explícitamente posible $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(C, M)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(C, M)$.

9. $u : X \to Y$ es un morfismo y $X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1]$ es un triángulo entonces $Z$ está determinado por $u : X \to Z$ a menos de isomorfismo (no único).

10. Consideremos la categoría $\mathcal{H}(A)$ y consideramos $\widetilde{D}(A)$ la categoría con los mismos objetos de $\mathcal{H}(A)$ (o sea, los objetos de $\mathrm{Chain}(A)$) y definimos

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(M, N)/\equiv$$

donde $\equiv$ es la relación de equivalencia determinada por $f \equiv 0$ si y sólo si existe un complejo acíclico $C$ y una factorización

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed] & & N \\ & C \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

(y $f \equiv g \iff f - g \equiv 0$). Muestre que la proyección en el Hom define un funtor natural $\mathcal{H}(A) \to \widetilde{D}(A)$, que $\widetilde{D}(A)$ es una categoría naturalmente triangulada (con los triángulos isomorfos a los que vienen de conos), que el funtor $\mathcal{H}(A) \to \widetilde{D}(A)$ manda triángulos, que los q-isos van a parar a isomorfismos, y que $\widetilde{D}(A) \cong D(A)$.

## 12.1. Triángulos en $D(A)$

11. Muestre que si
$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} Z \to 0$$
es una s.e.c. en Chain$(A)$ entonces existe un quasi-isomorfismo $Co(f) \to Z$ y que esa s.e.c. se la puede ver como parte de un triángulo en $D(A)$. Concluya la s.e.l. de homología aplicando $\mathrm{Hom}_{D(A)}(A, -)$.

12. Recíprocamente, si $X \to Y \to Z \to X[-1]$ es un triángulo en $D(A)$, muestre que existe un morfismo de complejos $f : M \to N$ y un isomorfismo de triángulos (en $D(A)$) entre el triángulo original y a una s.e.c. del tipo
$$0 \to N \xrightarrow{i} Co(f) \xrightarrow{\pi} M[-1] \to 0$$

## 12.2. Localización

13. Consideremos un diagrama conmutativo en $Chain(A)$ con $s$ y $t$ q-isomorfismos
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[d, "s'"] \\ Z \arrow[r, "t'"] & W \end{tikzcd}$$
Muestre que $t'$ es q-iso $\iff$ $s'$ es q-iso.

14. Ver que la suma en $\mathrm{Hom}_{D(A)}(M, N)$ está bien definida. Recordamos la suma estaba definida via
$$\begin{tikzcd} & X_1 & \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N, \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "s"] \\ & X_2 & \end{tikzcd} \quad t^{-1}f + s^{-1}g = ?$$

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[d, dotted, "s'"] & \\
M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & X_3 & N \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "s"] \arrow[l, dotted, "s't=t's"'] \\
 & X_2 \arrow[u, dotted, "t'"'] &
\end{tikzcd}$$

$$t^{-1}f + s^{-1}g = t^{-1}(s')^{-1}s'f + (s)^{-1}(t')^{-1}t'g = (s't)^{-1}(s'f + t'g)$$

y la relación de equivalencia está dada por

$$X \overset{f_1}{\to} Y_1 \overset{t_1}{\leftarrow} Z \quad \sim \quad X \overset{f_2}{\to} Y_2 \overset{t_2}{\leftarrow} Z$$

$\iff$ $\exists$ un diagrama conmutativo (con $t$ q-iso)

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[dr, "t_1"] & \\
X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & X_3 \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "t"] & Y \\
 & Y_2 \arrow[ur, "t_2"'] &
\end{tikzcd}$$

15. Ver que la composición en $D(A)$ está bien definida.

## 12.3. Las categorías $D(A)$ y $\mathcal{H}_{cerr}(A)$

16. Sea $k$ semisimple. Muestre que un complejo es acíclico si y sólo si es contráctil, por lo tanto equivalencia homotópic coincide con quasi-isomorfismo. El funtor proyección natural $\text{Chain}(k) \to \mathcal{H}(k)$ tiene la propiedad universal de la localización con respecto a los q-isos, y por lo tanto $\mathcal{H}(k) = D(k)$.

17. Muestre que el iso de $k$-modulos $\text{Hom}_A(A \otimes V, M) \cong \text{Hom}_k(V, M)$ induce los isomorfismos

$$\text{Hom}_{\text{Chain}(A)}(A \otimes V, M) \cong \text{Hom}_{\text{Chain}(k)}(V, M)$$
$$\text{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A \otimes V, M) \cong \text{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(V, M)$$
$$\text{Hom}_{D(A)}(A \otimes V, M) \cong \text{Hom}_{D(k)}(V, M)$$

18. Sea $P \in \text{Chain}(A)$ un sumando directo de $L$, es decir, existe un complejo $Q$ tal que $P \oplus Q \cong L$. Muestre que $P$ es parte de una s.e.c. que se parte de la forma

$$0 \to P \to L^{\mathbb{N}} \to L^{\mathbb{N}} \to 0$$

*Sugerencia: considere el isomorfismo*

$$(P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \cdots \cong P \oplus (Q \oplus P) \oplus (Q \oplus P) \oplus (Q \cdots$$

Concluya con argumento de triángulos que si una subcategoría triangulada de una categoría triangulada tiene sumas directas numerables, entonces es cerrada por sumandos directos.

19. Recordamos $P \in \mathrm{Chain}(A)$ se dice cerrado si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P,-) \to \mathrm{Hom}_{D(A)}(P,-)$ es un iso. Muestre el **Lema:** $P \overset{u}{\to} P' \overset{v}{\to} P'' \overset{w}{\to} P[-1]$ un triángulo en $\mathcal{H}(A)$, si dos son cerrados, el tercero también.

20. Si $M, N \in \mathrm{Chain}(A)$, entonces

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(M,N) \cong \mathrm{Hom}_{D(A)}(P(M),N) \cong \mathrm{Hom}_{D(A)}(P(M),P(N))$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P(M),N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P(M),P(N))$$

21. Muestre que si $M, N \in A$-Mod y los vemos como complejos concentrados en lugar cero, entonces $\mathrm{Hom}_{D(A)}(M, N[n]) = \mathrm{Ext}^n_A(M,M)$

## 12.4. Funtores derivados

22. Sea $F : A$-Mod$\to B$-Mod un funtor aditivo y consideramos $DF : D(A) \to D(B)$ dado por

$$DF(M) := F(P_A(M))$$

donde $P_A(M)$ es "una resolución funtorial de $M$".

   *a*) Muestre que si $F$ es exacto entonces $F$ está bien definido en $D(A)$ y $F(\rho) : DF \to F$ es un isomorfismo de funtores.

   *b*) Si $F : A$-Mod$\to B$-Mod es exacto a derecha y $M \in A$-Mod, que lo vemos como complejo concentrado en lugar cero, entonces $H_0(DF(M)) \cong F(M)$.

   *c*) Sean $F : A$-Mod$\to B$-Mod y $G : B$-Mod$\to C$-Mod dos funtores aditivos, si uno de los dos es exacto entonces

$$DG \circ DF \cong D(G \circ F) : D(A) \to D(C)$$

23. Sea $G$ un grupo y $N \triangleleft G$ un subgrupo *normal* y $V$ un $G$-módulo. Muestre que

   *a*) $V^N$ es naturalmente un $k[G/N]$-módulo, más aún,

   *b*) $H^n(N,V)$ es un $G/N$-módulo para todo $n$.

   *c*) $V^G = (V^N)^{G/N}$

   *d*) Si $N$ tiene índice finito $(G : N) = d$, $k$ es un anillo con $\frac{1}{d} \in k$ y $V$ un $k[G]$-módulo, entonces $H^n(G,V) = H^n(N,V)^{G/N}$ para todo $n$.

24. Sea $A$ un anillo y $G$ un grupo que actúa en $A$ por automorfismos de anillo. Se define $A \rtimes G = A[G]$ como grupo abeliano pero con la multiplicación

$$ag \cdot bh = ag(b)gh$$

   *a*) Si $M$ es un $A \rtimes G$-bimódulo, entonces

$$M^A = H^0(A,M) = \{m \in M : am = ma \ \forall a \in A\}$$

   es un $G$-módulo vía

$$g(m) := gmg^{-1}$$

b)
$$\{m \in M : \omega m = m\omega \ \forall \omega \in A \rtimes G\} = M^{A \rtimes G} = H^0(A \rtimes G, M) =$$
$$= (M^A)^G = \{m \in M^A : g(m) = m \ \forall g \in G\}$$

c) Si $G$ es finito y $|G|$ es inversible en $A$, entonces
$$H^n(A \rtimes G, M) = H^n(A, M)^G$$

25. Sea $k$ un cuerpo, $A$ una $k$-álgebra, y $\mathcal{T}$ un subcategoría de $D(A)$ que satisface

   a) $\mathcal{T}$ es estable por suspensión y triángulos (i.e. $M \in \mathcal{T}$ entonces $M[1]$ y $M[-1]$ también, y si $X \to Y \to Z \to X[-1]$ es un triángulo, $X, Y \in \mathcal{T}$ entonces $Z$ también)
   b) Si $V \in \mathrm{Chain}(k)$ y $X \in \mathcal{T}$ entonces $X \otimes V \in \mathcal{T}$
   c) $\mathcal{T}$ es estable por sumas directas arbitrarias

   Muestre que si $A \in \mathcal{T}$ entonces $\mathcal{T} \cong D(A)$.