Álgebras de Lie simples y semisimples

Definición: un ideal de $\mathfrak{g}$ es un subespacio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Definición: Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *simple* si no tiene ideales salvo 0 y $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}$ no es abeliana (excluyendo de esta manera el caso trivial cuando $\dim_k \mathfrak{g} = 1$)

Obs: $\mathfrak{g}$ simple $\Rightarrow \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
No hay simples en dimensión 2, pues $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = Im(\Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g})$.

Ejemplo / Ejercicio: $ch(k) \neq 2 \Rightarrow \mathfrak{sl}(2,k)$ es simple.

$$\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}c & -2a\\ 0 & -c\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-b & 0\\ 2a & b\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0 & 2a\\ -2c & 0\end{pmatrix}$$

Definición: Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *semisimple* si es isomorfa a un producto directo (con corchete coordenada a coordenada) de álgebras de Lie simples.

La forma de Killing

V un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita.

$$x|_V := x \cdot - : V \to V$$

Se define $b_V : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ por

$$b_V(x, y) = tr_V(x|_V \circ y|_V)$$

Vale:

$$b_V(x, y) = b_V(y, x)$$

$$b_V([x, y], z) = b_V(x, [y, z])$$

Si $V = \mathfrak{g}^{ad}$ se llama *forma de Killing* $\kappa(-, -)$.

La forma de Killing

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$: base $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
vale

$$[x, y] = h$$
$$[h, x] = 2x$$
$$[h, y] = -2y$$

La forma de Killing es no degenerada, pero no definida.
$\mathfrak{su}(2) = (\mathbb{R}^3, \times)$ base e_1, e_2, e_3, con corchete

$$[e_i, e_{i+1}] = e_{i+2} \qquad (Mod3)$$

Su forma de Killing es definida negativa $\Rightarrow su(2) \not\cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.
Sin embargo, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

La forma de Killing y semisimplicidad

Criterio de Cartan: $\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero

i) $\mathfrak{g}$ es semi-simple $\iff$ $\kappa_{\mathfrak{g}}$ no-degenerada.

ii) Si $\mathfrak{g}$ en una subálgebra de Lie $M_n(k)$, entonces $\beta(x, y) := tr(xy)$ (la traza usual de matrices) también es no degenerada.

(usaremos el criterio) (ver Humphreys, Knapp, Bourbaki,...)

Veremos que si $\mathfrak{g}$ es **simple** y $\mathfrak{g} \subset M_n(k)$

$$\Rightarrow \beta = \lambda\kappa \qquad\qquad (0 \neq \lambda \in k)$$

El Casimir

$\mathfrak{g}$ ss $x_1, \ldots, x_n$ una base, y sean $x^1, \ldots, x^n$ en $\mathfrak{g}$ tales que

$$\kappa(x_i, x^j) = \delta_i^j$$

se define el **Casimir**

$$\Omega := \sum_{i=1}^{n} x_i x^i \in U(\mathfrak{g})$$

es (Ejercicio!) independiente de la base elegida. En particular, $\Omega := \sum_{i=1}^{n} x_i x^i = \sum_{i=1}^{n} x^i x_i$.

A veces se considera $\Omega \in S^2(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Vale $x \in \mathfrak{g}$ y $[x_i, x] = \sum_j c_{ij} x_j \Rightarrow$

$$[x, x^j] = \sum_i c_{ij} x^i$$

Pues si $[x, x^j] = \sum_i a_{ij} x^i$, calculamos

$$a_{ij} = \kappa(x_i, [x, x^j]) = \kappa([x_i, x], x^j)$$

luego

$$\Omega \in Z(U\mathfrak{g})$$

$\therefore \forall$ $\mathfrak{g}$-módulo M, la multiplicación por Ω es $U(\mathfrak{g})$-lineal.

Lema de Schur Sea S un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita y simple (i.e. los únicos $\mathfrak{g}$-submódulos son 0 y S). Si k es algebraicamente cerrado, entonces $\exists c_S \in k$ tal que

$$\Omega|_S = c_S \mathrm{Id}_S$$

Notar que esto implica que $c_S \dim_k(S) = tr(\Omega|_S)$.

Mostraremos que S simple, entonces $S = k$ el módulo tricial es el **único** en donde $c_S = 0$.

Estructura monoidal de las representaciones

M y N dos $\mathfrak{g}$-módulos $\Rightarrow$

- $M \otimes N$ es naturalmente un $\mathfrak{g}$-módulo con la acción

$$x \cdot (m \otimes n) = xm \otimes n + m \otimes xn$$

  y la trasposición $M \otimes N \cong N \otimes M$ es $\mathfrak{g}$-lineal.

- $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ es un $\mathfrak{g}$-módulo via

$$(x \cdot f)(m) := xf(m) - f(xm)$$

  En particular M^* es $\mathfrak{g}$-módulo con $(x \cdot \phi)(m) = -\phi(xm)$.

- El morfismo natural

$$M^* \otimes N \to \mathrm{Hom}_k(M, N)$$

  es de $\mathfrak{g}$-módulos.

- $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N) = \mathrm{Hom}_k(M,N)^{\mathfrak{g}}$
- M de dimensión finita $\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N) \cong (M^* \otimes N)^{\mathfrak{g}}$
- La descomposición en tensores simétricos y antisimétricos $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} = S^2\mathfrak{g} \oplus \Lambda^2\mathfrak{g}$ es también como $\mathfrak{g}$-módulos. Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonce el "casimir"

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x^i \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$$

  es simétrico e invariante, i.e. un elemento de $S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.
- $((M\otimes N)^*)^{\mathfrak{g}}$=formas bilineales invariantes, donde b es invariante $\iff b([x,y],z) = b(x,[y,z])$

Sea $\mathfrak{g}$ simple $k = \overline{k}$

- $M = \mathfrak{g}^{ad}$ es una representación simple
  $\Rightarrow \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 1$ tiene dimensión 1.
- $\mathfrak{g}^{ad} \cong \mathfrak{g}^*$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}) \cong (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \cong (\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$$

todos tienen dimensión 1.

$\therefore (S^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ tiene dimensión 1 y está generado por el Casimir

(y $(\Lambda^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = 0$).

$\mathfrak{g}$ simple y M simple no trivial,

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(M) = M_m(k) \Rightarrow \mathfrak{g} \subset M_m(k)$$

1. $\beta(x, y) = tr(x|_M \circ y|_M)$ es no deg. (Cartan) $\Rightarrow \beta = \lambda\kappa$.

   $x_1, \dots, x_n$ una base de $\mathfrak{g}$ $\{y^1, \dots, y^n\}$ en $\mathfrak{g}$ satisfacen

$$\lambda\kappa(x_i, y^j) = \beta(x_i, y^j) = \delta_i^j \ \Rightarrow \ \widetilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} x_i y^i = \frac{1}{\lambda}\Omega$$

2. $\widetilde{\Omega}|_M = c\mathrm{Id}_M$ (Schur)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i|_M \circ y^i|_M = c\mathrm{Id}_M \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} tr(x_i|_M \circ y^i|_M) = c \dim M$$

$$\Rightarrow c \dim M = \sum_{i=1}^{n} \beta(x_i, y^i) = \dim \mathfrak{g}$$

$$\Rightarrow \widetilde{\Omega} = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim M} Id \neq 0 \Rightarrow \Omega|_M = c_M \mathrm{Id},\ c_M \neq 0.$$

Lemas de Whitehead y Teorema de Weyl

M simple $M \neq k \Rightarrow H^\bullet(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{U\mathfrak{g}}(k, M) = 0$

$\mathfrak{g}$ simple $\Rightarrow \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \Rightarrow H^1(\mathfrak{g}, k) = 0$.

Primer Lema de Whitehead: $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$ para todo M de dimensión finita.

Teorema de Weyl.

$\mathfrak{g}$ ss, $ch(k) = 0$, **entonces todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión de dimensión finita es completamente reducible.**

(todo submódulo de un módulo de dimensión finita se complementa, la cat. de $\mathfrak{g}$-módulos *de dimensión finita* es ss.)

dem: (versión $\mathfrak{g}$ simple y $k = \overline{k}$) primero

$$\mathrm{Ext}^1_{U\mathfrak{g}}(X, Y) \cong \mathrm{Ext}^1(k, \mathrm{Hom}_k(X, Y)) = H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(X, Y))$$

Si $\dim M < \infty$ $M_0 \subseteq M$ entonces

$$0 \to M_0 \to M \to M/M_0 \to 0$$

da un elemento de $\mathrm{Ext}^1_{U\mathfrak{g}}(M_0, M/M_0) = 0$.

(Comentario semisimple y/o $k \neq \overline{k}$.)

Segundo Lema de Whitehead

$H^2(\mathfrak{g}, S) = 0$ si S es simple $S \neq k$. $H^2(\mathfrak{g}, k) =?$

$$0 \to k \to \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$$

una s.e.c con π morfismo de álgebras y $k = \mathrm{Ker}(\pi)$.

Si $e \in \mathfrak{e}$ y $x \in \mathfrak{g}$, sea $\widetilde{x} \in \mathfrak{e}$ tal que $\pi(\widetilde{x}) = x$. Definimos

$$x \cdot e := [\widetilde{x}, e]$$

$\Rightarrow$ está bien definido $\Rightarrow \mathfrak{e} \in \mathfrak{g} - mod$ y π es $\mathfrak{g}$-lineal.

Por el teo de Weyl, admite sección $\mathfrak{g}$-lineal $s : \mathfrak{g}^{ad} \to \mathfrak{e}$

$$s([x, y]) = s(x \cdot_{ad} y) = x \cdot s(y) = [s(x), s(y)]$$

$\Rightarrow s$ es morfismo de álgebras $\Rightarrow H^2(\mathfrak{g}, k) = 0$
$\Rightarrow H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ si dim $M < \infty$.