Álgebras de Lie

Definición: k anillo conmutativo. Una k-álgebra de Lie es un k-módulo $\mathfrak{g}$ junto con una operación k-bilineal $[-,-] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que es

- antisimétrica: $[x, y] = -[y, x]$
  (en característica 2 se pide $[x, x] = 0$)
- y verifica Jacobi:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

Obs: Jacobi equivale a

$$[x, \ [y, z]] = [[x, y], \ z] + [y \ , [x, z]]$$

si $ad_x = [x, -]$,

$$ad_x([y, z]) = [ad_x(y), z] + [y, ad_x(z)]$$

Ejemplos

1. A k-álgebra (asociativa) entonces

$$[a,b] = ab - ba$$

   es una estructura de Lie en A.

2. $(A,*)$ una k-álgebra "general" $\Rightarrow$
   $\Rightarrow \mathrm{End}_k(A)$ es k-álgebra asociativa $\Rightarrow$ de Lie
   y $\mathrm{Der}(A,*) \subset \mathrm{End}_k(A)$ es subálgebra de Lie
   (pero no subálgebra asociativa en general)

$$\mathrm{Der}(A,*) = \{D : A \to A : D(a*b) = D(a)*b + a*D(b)\}$$

3. M variedad, $\mathfrak{X}(M) = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$
4. G grupo de Lie $\Rightarrow Lie(G) = T_1 G \cong X(G)^G \subset \mathfrak{X}(G)$

Ejemplos

- $\mathfrak{sl}(n,k) = \{M \in M_n(k) : tr(M) = 0\} = T_1 SL(n,k)$
- $\mathfrak{so}(n,k) = \{M \in M_n(k) : MM^t + M^t M = 0\} = T_1 SO(n,k)$
- $\mathfrak{u}(n) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : MM^* + M^* M = 0\} = T_1 U(n)$
- $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = T_1 SU(n)$

Teorema: [Chevalley - Eilenberg '48]
G un grupo de Lie conexo y compacto

$$\Rightarrow H^\bullet_{DR}(G) = H^\bullet(\Omega^\bullet(G), d_{dR}) = H^\bullet(\Omega^\bullet(G)^G, d_{dR})$$

en particular, depende sólo de $\mathfrak{g} = Lie(G) = T_1 G$

$$(\Omega^\bullet(G)^G, d_{dR}) = (\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}^*), \partial_{CE})$$

es un complejo de dimensión finita!

$$\Lambda^n \mathfrak{g}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^n \mathfrak{g}, \mathbb{R})$$

$$\partial(f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \widehat{x_i} \wedge \cdots \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_{n+1})$$

Álgebra envolvente

$\mathfrak{g}$ de Lie, se define el **álgebra universal envolvente**

$$U(\mathfrak{g}) := T\mathfrak{g}/(x \otimes y - y \otimes x - [x, y] : x, y \in \mathfrak{g})$$

es una k-álgebra asociativa y tiene la propiedad universal:

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{k-alg}(U(\mathfrak{g}), A) = \mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, Lie(A))}$$

donde, si A es asociativa, $Lie(A) := (A, [,] = conmutador)$.

Resulta

$$H^\bullet(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}^*), \partial_{CE}) = \mathrm{Ext}^\bullet_{U\mathfrak{g}}(k, k)$$

Teorema PBW: [Poincaré-Birkhoff-Witt] Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie que sea libre como k-módulo, con base $\{x_i : i \in I\}$ donde $(I, <)$ es un conjunto *totalmente* ordenado. Entonces los monomios

$$\{x_{i_1}^{n_{i1}} \cdots x_{i_k}^{n_{ik}} : k \in \mathbb{N}_0, i_1 < i_2 < \cdots < i_k, n_{i_j} \in \mathbb{N}\}$$

forman una base de $U(\mathfrak{g})$

Obs: si k es cuerpo, $\mathfrak{g}$ es libre. $U(\mathfrak{g}) = T\mathfrak{g}/(J)$ por lo tanto $U(\mathfrak{g})$ es **filtrada**. Como en $U(\mathfrak{g})$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{y} \cdot \overline{x} = \overline{x \otimes y - y \otimes x} = \overline{[x, y]}$$

entonces $gr(U(\mathfrak{g}))$ es conmutativa. PBW dice que

$$gr(U(\mathfrak{g})) \cong k[\{x_i\}_{i \in I}]$$

$\mathfrak{g}$-módulos:

Def: Un k-módulo M junto con una aplicación bilineal

$$\mathfrak{g} \times M \to M$$

$$(x, m) \mapsto x \cdot m$$

se dice un $\mathfrak{g}$-módulo si

$$x \cdot (y \cdot m) - y \cdot (x \cdot m) = [x, y] \cdot m$$

Obs: $\mathfrak{g}$-modulos $\equiv$ $U(\mathfrak{g})$-módulos pues

$$\mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathrm{End}_k(M)) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(U\mathfrak{g}, \mathrm{End}_k(M))$$

Ejemplos:

1. $M = U(\mathfrak{g})$, es un módulo de dimensión infinita.
2. $M = \mathfrak{g}$ con $x \cdot y := [x, y]$, es un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita. Se denota $\mathfrak{g}^{ad}$.

   $$x \cdot (y \cdot z) - y \cdot (x \cdot z) =$$

   $$= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [[x, y], z]$$
   $$= [x, y] \cdot z$$

3. $M = k$ con $x \cdot \lambda = 0$ es un g-módulo, se denomina el $\mathfrak{g}$-módulo trivial

Teorema: si $\mathfrak{g}$ es k-libre, entonces la siguiente es una resolución $U(\mathfrak{g})$-libre de k:

$$\cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to \cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} k \to 0$$

con diferencial

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n$$

y $\epsilon : U(\mathfrak{g}) \to k$ está determinado por $x \mapsto 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}$.

grados bajos:

$$d(u \otimes x \wedge y \wedge z) = ux \otimes y \wedge z - uy \otimes x \wedge z + uz \otimes x \wedge y$$
$$- u \otimes [x, y] \wedge z + u \otimes [x, z] \wedge y - u \otimes [y, z] \wedge x$$

$$d(u \otimes x \wedge y) = ux \otimes y - uy \otimes x - u \otimes [x, y]$$
$$d(u \otimes x) = ux$$

demostración (sketch)

$$\cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to \cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} k \to 0$$

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n$$

- d está bien definido, i.e. la fórmula es totalmente antisimétrica en $x_1, \ldots, x_n$ (ejercicio)
- $d^2 = 0$ (ejercicio, más largo que el caso simplicial)
- El complejo es filtrado y su graduado asociado es exacto, pues es el complejo de Koszul!

Def: $(C_\bullet, d) \in \mathrm{Chain}(A)$ se dice **filtrado** si $\forall n$ se tiene dada

$$0 \subseteq \cdots \subseteq F_p(C_n) \subseteq F_{p+1}(C_n) \subseteq \cdots \subseteq C_n$$

y $d(F_p(C_n)) \subseteq F_p(C_{n-1})\ \forall n, p$.

la filtración es **exhaustiva** si $\bigcup_p F_p(C_n) = C_n$.

la filtración es **Hausodorff** si $\bigcap_p F_p(C_n) = 0$.

la filtración **empieza** en un momento si $\forall n$
$\exists p_0 = p_0(n) : F_{p_0}(C_n) = 0$.

Definimos $gr(C_n) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} gr(C_n)_p := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \dfrac{F_p(C_n)}{F_{p-1}(C_n)}$ con diferencial $\overline{d}$

$$\overline{d}(c\ MOD\ F_{p-1}(C_n)) := d(c)\ MOD\ F_{p-1}(C_{n-1})$$

Teorema: Si en $C_\bullet$ se tiene una filtración exhaustiva y que empieza y $(gr(C), \overline{d})$ es exacto, entonces (C, d) es exacto.

dem: Sea $x \in C_n$ tal que $d(x) = 0$. Como es exhaustiva, existe $p : x \in F_p(C_n)$. Consideramos $\overline{x} \in gr(C_n)_p$

$$d(\overline{x}) = \overline{dx} = 0 \Rightarrow \exists \overline{y}_p \in gr(C_{n+1})_p : \overline{x} = d\overline{y}_p = \overline{dy_p}$$

$$\Rightarrow x = dy_p + z_{p-1} \qquad (z_{p-1} \in F_{p-1}(C_n))$$

Claramente $0 = dx = d(dy_p + z_{p-1}) = dz_{p-1}$.
Recursivamente podemos suponer que $z_{p-1} = d(alguien)$, pues $z_{p-1} \in F_{p-1}$ y la recursión termina porque la filtración empieza en algún momento.

$$\cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to \cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} k \to 0$$

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n$$

$\rightsquigarrow$

$$\cdots \to S(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to \cdots \to S(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \to S(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to S(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} k \to 0$$

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$

Grados bajos

$H_1(\mathfrak{g}, k)$:

$$\cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to \cdots \to U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \to 0$$

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n$$

$k \otimes_{U(\mathfrak{g})} - \rightsquigarrow$

$$\cdots \longrightarrow \Lambda^3 \mathfrak{g} \longrightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g} \xrightarrow{[-,-]} \mathfrak{g} \xrightarrow{0} k \longrightarrow 0$$

$\therefore H_1(\mathfrak{g}, k) = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
(Recordar/ejercicio: $H_1(G, \mathbb{Z}) = G/[G, G]$)

Grados bajos

$H^1(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)/\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g}, M)$, donde

$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M) = \{D : \mathfrak{g} \to M : D([x, y]) = x \cdot D(y) - y \cdot D(x)\}$,

$\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g}, M) = \{D : \exists m_0 / D(x) = x \cdot m_0\}$

$H^1(\mathfrak{g}, k) = \{D : \mathfrak{g} \to k : D([x, y]) = 0\}$

$f : \Lambda^2\mathfrak{g} \to M$ es 2-cociclo $\leftrightarrow$ $f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to M$ antisimétrica y

$$x \cdot f(y, z) - y \cdot f(x, z) + z \cdot f(x, y)$$
$$-f([x, y], z) + f([x, z], y) - f([y, z], x) = 0$$

H^2 y extensiones de álgebras de Lie

$f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to M$ bilineal. En $M \oplus \mathfrak{g}$. escribmos m en vez de $(m, 0)$ y x en vez de $(0, x)$. Se puede definir a operación

$$[m, m']_f = 0$$

$$[x, m]_f = x \cdot m = -[m, x]_f \qquad \in M$$

$$[x, y]_f = f(x, y) + [x, y] \qquad \in M \oplus \mathfrak{g}$$

Ejercicio: $[-, -]_f$ antisimétrica $\iff$ f es antisimétrica

$[-, -]_f$ verifica Jacobi $\iff$ f es un-cociclo.

Toda sucesión exacta de la forma

$$0 \to M \to \mathfrak{e} \to \mathfrak{g} \to 0$$

donde $\mathfrak{e} \to \mathfrak{g}$ es morfismo de álgebras de Lie
y M es un ideal abeliano de $\mathfrak{e}$, sucede de esta forma.