Superálgebras de Lie y complejos

Sea $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ una superálgebra de Lie y $m \in \mathfrak{g}_1$ tal que

$$[m, m] = 0$$

Entonces $\partial_m = [m, -]$ verifica

- $\partial_m(\mathfrak{g}_n) \subseteq \mathfrak{g}_{n+1}$
- $\partial_m([x, y]) = [\partial_m(x), y] + (-1)^{|x|}[x, \partial_m(y)]$
- $\partial_m^2 = 0$
- $[m, \mathfrak{g}] = \partial_m(\mathfrak{g}) \triangleleft Z_m$, $Z_m/\partial_m(\mathfrak{g})$ es super-Lie.

Coálgebras y coderivaciones

Una **coalgebra** sobre k es $(C, \Delta : C \to C \otimes C)$ que admite $\epsilon : C \to k$ verificando

- coasociatividad:
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{Id}"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$
- counitariedad
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C \otimes C \arrow[d, "\epsilon\otimes\mathrm{Id}"] \\ C \arrow[r, "\cong"] & k \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\epsilon"] \\ C \arrow[r, "\cong"] & C \otimes k \end{tikzcd}$$

(son diagramas conmutativos)

Ejemplos

- $\dim_k A < \infty \Rightarrow C = A^*$ es coálgebra con $\Delta = m^*$ y $\epsilon = \mu^*$ donde $\mu : k \to A$ es la inclusión de k en A.
- Si $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ y $\dim_k A_n < \infty \forall n \Rightarrow$ el dual graduado

$$C = A' := \bigoplus_{n \geq 0} A_n^*$$

es coálgebra, graduada:

$$\Delta(C_n) \subseteq \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes C_q$$

(ojo $n \in \mathbb{N}_0$, si $n \in \mathbb{Z}$ no está garantizado)
- Si C es coálgebra, entonces C^* siempre es un álgebra. **Filosofía:** C^* es álgebra $\Rightarrow$ es probable que C sea coálgebra

Ejemplos

- G grupo finito, $k[G]$ es álgebra, pero también coálgebra definiendo

$$\Delta\Big(\sum_{g\in G}\lambda_g g\Big)=\sum_{g\in G}\lambda_g g\otimes g$$

(y Δ es morfismo de álgebra)

- Dualmente, si G es un grupo *finito*, el álgebra k^G también es coálgebra definiendo

$$k^{G\times G}\cong(k^G\otimes k^G)\ni\Delta(f)(g,h)=f(g,h)$$

por ejemplo,

$$\Delta\delta_x=\sum_{g\in G}\delta_g\otimes\delta_{g^{-1}x}$$

Ejemplos

- $A = O(M_n(k)) = k[x_{ij} : 1, j = 1 \ldots, n]$ una coálgebra via $\Delta : A \to A \otimes A =$ el ! morfismo de álgebras t.q.

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_k x_{ik} \otimes x_{kj}$$

- Si G es un subgruo (o submonoide) de $M_n(k)$ definido por ecuaciones $f_1, \cdots f_k$ (por ejemplo $SL_n(k) = \{\det = 1\}$) $\Rightarrow O(G) = O(M_n(k))/(f_1, \ldots, f_k)$ (asumiendo radical) es coálgebra con

$$O(M_n(k)) \to O(G)$$

un epi de coálgebras.
Filosofía II: X conjunto, $O(X)$ es álgebra, si en X hay un producto asociativo $\Rightarrow$ en $O(X)$ hay un coproducto

Ejemplos coálgebra co-libre

V k-esp vectorial y

$$C = k \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots$$

Un elemento de $V^{\otimes n}$ lo escribimos como sumas de elementos de la forma $v_1 \cdots v_n$. Definimos la *deconcatenación* como

$$\Delta(v_1 \cdots v_n) = 1 \otimes v_1 \cdots v_n + v_1 \otimes v_2 \cdots v_n + \cdots$$

$$\cdots + v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n + v_1 \cdots v_n \otimes 1$$

$$= \sum_{i=0}^{n} v_1 \cdots v_i \otimes v_{i+1} \cdots v_n \qquad \text{(por convención } v_0 = 1 = v_{n+1}\text{)}$$

Es coálgebra con $\epsilon(V^{\otimes n}) = 0 \ \forall n \geq 1$.

Si $\dim_k V < \infty \Rightarrow T^c V \cong$ dual graduado de TV^*.

Co-derivaciones

Si C es una coálgebra, se define *coderivación* como un morfismo k-lineal $D : C \to C$ que verifica

$$(D \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes D)\Delta = \Delta D$$

o equivalentemente, que $D^* : C^* \to C^*$ es una derivación.

Hecho: $Coder(C) \subset \mathrm{End}_k(C)$ es subálgebra de Lie.

Super Co-derivaciones

Si $C = \oplus_n C_n$ es una coálgebra graduada,
$D : C \to C$ t.q. $D(C_n) \subseteq C_{n+p} \forall n$
se dice super coderivación si D^* es una super-derivación (de grado $-p$) de C' (el dual graduado de C),
o equivalentemente

$$(D \otimes \mathrm{Id} + \pm\mathrm{Id} \otimes D)\Delta = \Delta D$$

donde $\pm\mathrm{Id}(c) := (-1)^{|c|} c$ para todo homogéneo c.

Hecho super: $Coder_s(C) := \bigoplus_p Coder_p(C)$
es super-álgebra de Lie (subálgebra de $\mathrm{End}(C)$)

Super Co-derivaciones y el complejo de Hochschild

Sea V un k-espacio vectorial, $T^cV =$ coálgebra graduada con $|V| = 1$.

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V) \cong \bigoplus_{n} Coder_{-n+1}(T^cV, T^cV)$$

Hecho dual: Consideramos TW como álgebra graduada,

$$\mathrm{Der}_p(TW, TW) \cong \mathrm{Hom}_k(W, W^{\otimes p+1})$$

Si dim $V < \infty$, tomamos $W = V^*$, pero el iso es cierto aún en dimensión arbitraria.

Super Co-derivaciones y el complejo de Hochschild

Ejemplo: $f : V^{\otimes 2} \to V$. Consideramos $f : T^c V \to V$ con $m(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 0$ si $n \neq 2$ (escribimos $a_i \in V$).

$$D_f(a \otimes b) = f(a \otimes b) \in A$$

$$V^{\otimes 2} \ni D_f(a \otimes b \otimes c) = f(a \otimes b) \otimes c - a \otimes f(b \otimes c)$$

$$D_f(a \otimes b \otimes c \otimes d) = f(a \otimes b) \otimes c \otimes d - a \otimes f(b \otimes c) \otimes d + a \otimes b \otimes f(c \otimes d)$$

$$D_f(a \otimes b \otimes c \otimes d \otimes e) = f(a \otimes b) \otimes c \otimes d \otimes e - a \otimes f(b \otimes c) \otimes d \otimes e$$
$$+ a \otimes b \otimes f(c \otimes d) \otimes e - a \otimes b \otimes c \otimes f(d \otimes e)$$

$$\cdots$$

verifica $\boxed{(D_f \otimes \mathrm{Id} + \pm \mathrm{Id} \otimes D_f)\Delta = \Delta D_f}$ y $\boxed{p_V \circ D_f = f}$.
Está unívocamente determinada por esas condiciones

Super Co-derivaciones y el complejo de Hochschild

$D_m = b'$!

Corolario: son equivalentes

- $m : A^{\otimes 2} \to A$ es un producto asociativo en A
- $D_m^2 = 0$

dem: D_m^2 es coderivación de $T^c V$, de grado -2, se corresponde con $D : V^{\otimes 3} \to V$

$$D = D_m^2|_{V^{\otimes 3}} = \Big(a \otimes b \otimes c \mapsto ab \otimes c - a \otimes bc \mapsto (ab)c - a(bc) \Big)$$

Super Co-derivaciones y el complejo de Hochschild

Además, si $f : V^{\otimes n} \to V$, consideramos D_f y D_m,

$$[D_f, D_m] \in Coder(T^c V)_{-n} \cong \mathrm{Hom}(V^{\otimes n+1}, V)$$

$$[D_f, D_m](a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = f(D_m(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}))$$
$$-(-1)^{|D_f|} m(D_f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}))$$

$$= f(b'(a_1 \otimes \cdots a_{n+1}))$$
$$-(-1)^{n-1} m\Big(f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1}) + (-1)^{n-1} a_1 \otimes f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})\Big)$$
$$= f(b'(a_1 \otimes \cdots a_{n+1}))$$
$$+(-1)^n f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1}) - a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})\Big)$$
$$= -\partial(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})$$

$$\boxed{\boxed{\therefore [D_f, D_m] = D_{-\partial f}}}$$

Super Co-derivaciones y el complejo de Hochschild

Coro: $A = (V, m)$ una k-álgebra asociativa $\Rightarrow H^{\bullet}(A, A)[-1]$ es super-álgebra de Lie.
En particular, $HH^{\bullet -1}(A)$ es una superálgebra de Lie, o sea,

$$[HH^p, HH^q] \subseteq HH^{p+q-2}$$

y verifica super Jacobi con respecto al grado $p-1$ si un elemento esta en HH^p.
$HH^1(A) = \mathrm{Der}(A)/Innder(A)$ es una subálgebra de Lie (usual), $\mathrm{Der}(A)$ actúa en toda la cohomología, $InnDer(A)$ actúa trivialmente.
Además, el corchete da operaciones adicionales, por ejemplo $[HH^2, HH^2] \subseteq HH^3$, etc.

Super Co-derivaciones y álgebras de Lie

V un k-espacio vectorial (dimensión arbitraria)
$\Lambda^c V=$ los tensores completamente antisimétricos,
$\Lambda^c V$ es una subcoálgebra de $T^c V$, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\Delta(+xyz) &= +1 \otimes xyz + x \otimes yz + xy \otimes z + xyz \otimes 1 \\
\Delta(-xzy) &= -1 \otimes xzy - x \otimes zy - xz \otimes y - xzy \otimes 1 \\
\Delta(-yxz) &= -1 \otimes yxz - y \otimes xz - yx \otimes z - yxz \otimes 1 \\
\Delta(+yzx) &= +1 \otimes yzx + y \otimes zx + yz \otimes x + yzx \otimes 1 \\
\Delta(+zxy) &= +1 \otimes zxy + z \otimes xy + zx \otimes y + zxy \otimes 1 \\
\Delta(-zyx) &= -1 \otimes zyx - z \otimes yx - zy \otimes x - zyx \otimes 1
\end{aligned}$$

El diferencial de Chevalley-Eilenberg $=$ la ! $d \in Coder_{-1}(\Lambda^c V)$
tal que $d|_{\Lambda^2\mathfrak{g}} = [-,-] : \Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.
$d^2 = 0 \iff [-,-]$ verifica Jacobi.
Automáticamente $(\Lambda\mathfrak{g}^*, d^*)$ es una d.g. algebra