Fórmula de Künneth

(X_A, d), $({}_A Y, d)$ dos complejos.

$dx = 0$, $dy = 0$ entonces $d(x \otimes y) = 0$.

$dx = 0$, $y = dy' \Rightarrow x \otimes y = x \otimes dy' = \pm d(x \otimes y')$

$x = dx'$, $dy = 0 \Rightarrow x \otimes y = dx' \otimes y = d(x \otimes y')$

$\therefore$ está bien definida $H_p X \times H_q Y \to H_{p+q}(X \otimes_A Y)$

es bilineal y balanceada, luego, para cada n $\exists$ flecha natural

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p X \underset{A}{\otimes} H_q Y \to H_n(X \underset{A}{\otimes} Y)$$

Puede ser uniso en general?
Si $X_\bullet = P_\bullet(M)$, es exacto salvo en 0, y si $Y = N$, tambien es exacto salvo en 0,

pero $X \otimes_A Y = P(M) \otimes_A N$ calcula $Tor_n^A(M, N)$...

A veces es un iso? si, a veces.

Teorema: (Fórmula de Künneth) Supongamos $\forall n\ B(X)_n$ es proyectivo y $Z(X)_n$ es playo. Entonces el morfismo natural anterior está en una s.e.c.

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_pX \underset{A}{\otimes} H_qY \to H_n(X \underset{A}{\otimes} Y) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^A(H_pX, H_qY) \to 0$$

Ejemplo: $A = k$ un cuerpo $\Rightarrow$ el morfismo natural es un iso.

Ejemplo: $A = \mathbb{Z}$ (o un dip) y X_n libre $\forall n$ (e.g. $X=$ el grupo abeliano libre en un conjunto simplicial) $\Rightarrow B_n(X)$ y $Z_n(X)$ son libres $\forall n$ (sobre un dip, submódulo de un libre es libre) $\Rightarrow$ vale la fórmula de Künneth.

Ejemplo: Existen morfismos (Eilenberg-Zilber)

$$C_\bullet^{sing}(X \times Y) \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} C_\bullet^{sing}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C_\bullet^{sing}(Y)\ ,\ FG = \mathrm{id},\ GF \sim Id$$

Sea k un cuerpo, y consideramos

$$0 \to k[x] \xrightarrow{x} k[x] \to k \to 0$$

es exacto.

si $X = (0 \to k[x]e_1 \xrightarrow{d} k[x] \to 0)$
($k[x]$ en grados 0 y 1, $d(e_1) = x$)

$H_1(X) = 0$, $H_0(X) = k$.

Si $Y = (0 \to k[y]e_2 \xrightarrow{y} k[y] \to 0)$
$\Rightarrow X \otimes Y \cong$
$0 \to k[x,y]e_1 e_2 \to k[x,y]e_1 \oplus k[x,y]e_2 \to k[x,y] \to 0$

$$d(e_1 e_2) = xe_1 - ye_2,\ d(e_1) = x,\ d(e_2) = y$$

$\rightsquigarrow$ generalizacion a $k[x_1, \dots, x_n]$.

A y B dos k-álgebras, supongamos k cuerpo.
M_A, ${}_AN$ M'_B, ${}_BN'$, entonces ($\otimes = \otimes_k$)

$M \otimes M'$ es un $A \otimes B$-modulo a derecha,
$N \otimes N'$ es un $A \otimes B$-modulo a izquierda, y

$$Tor_\bullet^{A\otimes B}(M \otimes M', N \otimes N') = Tor_\bullet^A(M, N) \otimes Tor_\bullet^B(M', N')$$

dem: Ejercicio 1) $P_\bullet \to M$, $P'_\bullet \to M'$ dos resoluciones, entonces $P \otimes P'$ resuelve a $M \otimes M'$ (usamos Künneth),

2) $(P \otimes P') \underset{A\otimes B}{\otimes} (N \otimes N') \cong (P \underset{A}{\otimes} N) \otimes (P' \underset{B}{\otimes} N')$

$$(p \otimes p') \underset{A\otimes B}{\otimes} (n \otimes n') \leftrightarrow (p \underset{A}{\otimes} n) \otimes (p' \underset{B}{\otimes} n')$$

3)

$$H_\bullet\Big((P \underset{A}{\otimes} N) \otimes (P' \underset{B}{\otimes} N')\Big) \cong H_\bullet(P \underset{A}{\otimes} N) \otimes H_\bullet(P' \underset{B}{\otimes} N')$$

Teorema: (Fórmula de Künneth) Supongamos $\forall n\ B(X)_n$ es proyectivo y $Z(X)_n$ es playo. Entonces el morfismo natural anterior está en una s.e.c.

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_pX \underset{A}{\otimes} H_qY \longrightarrow H_n(X \underset{A}{\otimes} Y) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^A(H_pX, H_qY) \longrightarrow 0$$

Sea X un complejo, $H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$

$$0 \to (Z(X),0) \xrightarrow{i} (X,d) \xrightarrow{d} B(X)[-1] \to 0$$

es sec de complejos. $\forall p$

$$0 \longrightarrow Z_p(X) \xrightarrow{i} X_p \xrightarrow{d} B_{p-1}(X) \longrightarrow 0$$

es s.e.c. de A-módulos (a derecha)
Sup. $B_n(X)$ proyectivo $\forall n \Rightarrow$ (lugar a lugar) se parte.

Si $Y_\bullet$ es un complejo (de A-mod a izq), $\Rightarrow \forall q$

$$0 \longrightarrow Z_p(X) \otimes Y \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}_Y} X_p \otimes Y \xrightarrow{d_X \otimes \mathrm{id}_Y} B_{p-1}(X) \otimes Y \longrightarrow 0$$

es exact y también

$$0 \longrightarrow (Z(X) \otimes Y)_n \xrightarrow{i} (X \otimes Y)_n \xrightarrow{d_X \otimes \mathrm{id}_Y} (B(X) \otimes Y)_{n-1} \longrightarrow 0$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (Z(X)\otimes Y)_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pm Id\otimes d_Y=" ', "d"] & (X\otimes Y)_n \arrow[r, "d_X\otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[d, "d" '] & (B(X)\otimes Y)_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d=" ', "\pm Id\otimes d_Y"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (Z(X)\otimes Y)_{n-1} \arrow[r, "i"] & (X\otimes Y)_{n-1} \arrow[r, "d_X\otimes \mathrm{id}_Y"] & (B(X)\otimes Y)_{n-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Concluimos una s.e.c. de complejos

$$0 \longrightarrow Z(X)\otimes Y \xrightarrow{i} X\otimes Y \xrightarrow{d_X\otimes \mathrm{id}_Y} B(X)\otimes Y[-1] \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ s.e. larga en homología

$$\cdots \to H_{n+1}(Z(X)\otimes Y) \to H_{n+1}(X\otimes Y) \to H_{n+1}(B(X)\otimes Y[-1]) \to$$

$$\to H_n(Z(X)\otimes Y) \to H_n(X\otimes Y) \to H_n(B(X)\otimes Y[-1]) \to \cdots$$

$$\cdots \to H_{n+1}(Z(X) \otimes Y) \to H_{n+1}(X \otimes Y) \to H_{n+1}(B(X)[-1] \otimes Y) \to$$

$$\to H_n(Z(X) \otimes Y) \to H_n(X \otimes Y) \to H_n(B(X)[-1] \otimes Y) \to$$

Obervamos: para $W = Z$ ó B

$$H_n(W \otimes Y) = \oplus_p H_{n-p}(W_p \otimes Y)$$

y si Z es playo (B era proyectivo, luego playo también), para $W = Z$ ó B

$$H_n(W \otimes Y) = \oplus_p W_p \otimes H_{n-p}(Y) = (W \otimes H(Y))_n$$

Tambien es claro que $H_{n+1}(B(X) \otimes Y[-1]) = H_n(B(X) \otimes Y)$.

la suc.

$$\cdots \to H_{n+1}(Z(X) \otimes Y) \to H_{n+1}(X \otimes Y) \to H_{n+1}(B(X) \otimes Y[-1]) \to$$

$$\to H_n(Z(X) \otimes Y) \to H_n(X \otimes Y) \to H_n(B(X)[-1] \otimes Y) \to$$

queda

$$\cdots \to \oplus_p B_p \otimes H_{n-p}(Y) \to$$

$$\to \oplus_p Z_p \otimes H_{n-p}(Y) \to H_n(X \otimes Y) \to \oplus_p B_p \otimes H_{n-1-p}(Y) \to$$

$$\to \oplus_p Z_p \otimes H_{n-1-p}(Y) \to \cdots$$

como tensorizar es exacto a derecha, el conucleo de

$$\oplus_p B_p \otimes H_{n-p}(Y) \to \oplus_p Z_p \otimes H_{n-p}(Y)$$

es

$$\oplus_p H_p(X) \otimes H_{n-p}(Y)$$

por lo tanto ...

La suc.

$$\cdots \to \oplus_p B_p \otimes H_{n-p}(Y) \to$$

$$\to \oplus_p Z_p \otimes H_{n-p}(Y) \to H_n(X \otimes Y) \to \oplus_p B_p \otimes H_{n-1-p}(Y) \to$$

$$\to \oplus_p Z_p \otimes H_{n-1-p}(Y) \to \cdots$$

nos da

$$0 \to \oplus_p H_p(X) \otimes H_{n-p}(Y) \to H_n(X \otimes Y) \to \oplus_p B_p \otimes H_{n-1-p}(Y) \to$$

$$\to \oplus_p Z_p \otimes H_{n-1-p}(Y) \to \cdots$$

a su vez, la imagen de la segunda flecha, es el nucleo de

$$\oplus_p B_p \otimes H_{n-1-p}(Y) \to \oplus_p Z_p \otimes H_{n-1-p}(Y)$$

Calcularemos este núcleo.

$$\oplus_p B_p \otimes H_{n-1-p}(Y) \to \oplus_p Z_p \otimes H_{n-1-p}(Y)$$

Para calcular este nucleo, considermos la s.e.c.

$$0 \to B_p \to Z_p \to H_p(X) \to 0$$

que, al tensorizar con $H_q(Y)$ da

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(Z_p(X), H_q(Y)) \to \mathrm{Tor}_1(H_p(X), H_q(Y)) \to$$

$$\to B_p \otimes H_q(Y) \to Z_p \otimes H_q(Y) \to H_p(X) \otimes H_q(Y) \to 0$$

pero como habiamos supuest Z_p playo,

$$\mathrm{Tor}_1(H_p(X), H_q(Y)) = \mathrm{Ker}(B_p \otimes H_q(Y) \to Z_p \otimes H_q(Y))$$

luego

$$\bigoplus_p \mathrm{Tor}_1(H_p(X), H_{n-p}(Y)) = \mathrm{Ker}\left(\bigoplus_p B_p \otimes H_{n-p}(Y) \to \bigoplus_p Z_p \otimes H_{n-p}(Y)\right)$$

$\Rightarrow$

$$0 \to \bigoplus_p H_p(X) \otimes H_{n-p}(Y) \to H_n(X \otimes Y) \to \bigoplus_p \mathrm{Tor}_1(H_p(X), H_{n-1-p}(Y)) \to 0$$

Se re-escribe como

$$0 \to (HX \otimes HY)_n \to H_n(X \otimes Y) \to \bigoplus_p \mathrm{Tor}_1(H_pX, H_{n-1-p}Y) \to 0$$

Casos particulares:
k un cuerpo, entonces

$$H_\bullet(X) \otimes H_\bullet(Y) \cong H_\bullet(X \otimes Y)$$

si (BX proy, ZX playo y) o bien $H(X)$, o bien $H(Y)$ playo $\Rightarrow$

$$H_\bullet(X) \underset{A}{\otimes} H_\bullet(Y) \cong H_\bullet(X \underset{A}{\otimes} Y)$$

V espacio topológico, $S_\bullet(V,A)$=A-módulo libre en los símplices en V,

$$H_\bullet^{sing}(V,A) := H_\bullet(S_\bullet(V,A))$$

Es claro que

$$S_\bullet(V,A) = S_\bullet(V,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

$X = S_\bullet(V,\mathbb{Z})$, $B(X)$ y $Z(X)$ son $\mathbb{Z}$-libres. $Y = A$, $H_\bullet(Y) = H_0(Y) = A$.

Llamemos $H_nV := H_n^{sing}(V,\mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ existe s.e.c.

$$0 \to H_nV \otimes_{\mathbb{Z}} A \to H_n^{sing}(V,A) \to Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}V,A) \to 0$$

x.ej. si $H_n(V)$ tiene p-torsión $\Rightarrow H_{n+1}^{sing}(V,\mathbb{Z}_p) \neq 0$.

Resolución de Koszul

$A = k[x_1, \ldots, x_n]$, $M = k$ (via evaluación en cero),
$\mathrm{Ker}(ev_0 : A \to k) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \sum_{i=1}^n Ax_i$

$$? \cdots \to \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i \to A \to k \to 0$$

$$e_i \mapsto x_i$$

Para cada $k \geq 0$ tomamos ($K_0 = A$)

$$d : K_k^n := \bigoplus_{i_1 < \cdots < i_k} Ae_{i_1} \cdots e_{i_k} \to K_{k-1}^n$$

$$e_{i_1} \cdots e_{i_k} \mapsto x_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} - x_{i_2} e_{i_1} e_{i_3} \cdots e_{i_k} + \cdots$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} x_{i_j} e_{i_1} \cdots \widehat{e_{i_j}} \cdots e_{i_k}$$

Resolución de Koszul

Hechos: $K_\bullet^n$ termina

$$\cdots \to \bigoplus_{i=1}^{n} k[x_1, \ldots, x_n]e_i \to k[x_1, \ldots, x_n] \to 0$$

$$\therefore H_0(K_\bullet^n) = k[x_1, \ldots, x_n]/\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = k$$

$$K_\bullet^1 = (\ 0 \to k[x]e \xrightarrow[e \mapsto x]{} k[x] \to 0\ )$$

$$K_\bullet^{n+1} = K_\bullet^n \otimes_k (\ 0 \to k[x_{n+1}]e_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1} \mapsto x_{n+1}} k[x_{n+1}] \to 0\ )$$

$$\therefore H_k(K_\bullet^{n+1}) = 0 \ \forall k > 0.$$