Koszulidad y la resolución standard

Recordamos

$$\cdots A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \xrightarrow{b'} \cdots \to A \otimes A \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$$

la resolución de A como A-bimódulo.

$$A^{¡}_n = R_n = \bigcap_i V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{n-i-2} \subseteq V^{\otimes n} \subseteq A^{\otimes n}$$

lo que nos induce un morfismo de A-bimódulos

$$A \otimes A^{¡}_n \otimes A \hookrightarrow A \otimes V^{\otimes n} \otimes A \hookrightarrow A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$$

Nos preguntamos qué diferencial poner (si es que se puede) en en $A \otimes A^{¡}_\bullet \otimes A$ para tener un morfismo de complejos.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & A \otimes A^{¡}_{n} \otimes A \arrow[r, dashed, "?"] \arrow[d, equal] & A \otimes A^{¡}_{n-1} \otimes A \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots & A \otimes \Big(\bigcap\limits_{i+j=n-2} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{j} \Big) \otimes A \arrow[d, hook] & A \otimes \Big(\bigcap\limits_{i+j=n-3} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{j} \Big) \otimes A \arrow[d, hook] & \cdots \\
\cdots & A \otimes V^{\otimes n} \otimes A \arrow[d, hook] & A \otimes V^{\otimes n-1} \otimes A \arrow[d, hook] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \arrow[r, "b'", "=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i} b_i"'] & A \otimes A^{\otimes n-1} \otimes A \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

$$
\forall 0 < i < n: \;\; b_i|_{A \otimes R_n \otimes A} = b_i|_{A \otimes V^{\otimes i-1} \otimes R \otimes V^{\otimes j} \otimes A} \equiv 0!
$$

$\therefore$ el diferencial está inducido por

$$A \otimes V^{\otimes n} \otimes A \xrightarrow{d=b'|} A \otimes V^{\otimes n-1} \otimes A$$

$$a \otimes v_1 \otimes \cdots v_n \otimes b \mapsto av_1 \otimes v_2 \otimes \cdots v_n \otimes b$$
$$+(-1)^n a \otimes v_1 \otimes \cdots v_{n-1} \otimes v_n b$$

Obs.: el sumando de la izq. es el diferencial familiar de Koszul, el de la derecha es el análogo, pero con signo alternado.
En grados bajos:

$$\cdots \longrightarrow A \otimes R \otimes A \longrightarrow A \otimes V \otimes A \longrightarrow A \otimes A \xrightarrow{m} A$$

$$\sum a \otimes r \otimes r' \otimes b \longmapsto \sum ar \otimes r' \otimes b$$
$$+\sum a \otimes r \otimes r'b$$

$$a \otimes v \otimes b \longmapsto av \otimes b - a \otimes vb$$

Teorema:

Son equivalentes:

1. El complejo $K_{bi}(A) = A \otimes A^{\text{¡}}_{\bullet} \otimes A$ es acíclico,

$$\cdots \longrightarrow A \otimes R_3 \otimes A \longrightarrow A \otimes R \otimes A \longrightarrow A \otimes V \otimes A \longrightarrow A \otimes A \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

2. El complejo de Koszul a izq. $K_\ell(A) = A \otimes A^{\text{¡}}_{\bullet}$ es acíclico,

$$\cdots \longrightarrow A \otimes R_3 \longrightarrow A \otimes R \longrightarrow A \otimes V \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} k$$

3. El complejo del otro lado $K_r(A) = A^{\text{¡}}_{\bullet} \otimes A$ es acíclico.

$$\cdots \longrightarrow R_3 \otimes A \longrightarrow R \otimes A \longrightarrow V \otimes A \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} k$$

4. La inclusión $A \otimes A^{\text{¡}}_{\bullet} \otimes A \to C_\bullet(A, A)$ es un q-iso.

Coro 1: A Koszul $\Rightarrow \forall M \in A$-Mod, M admite la resolución (funtorial)

$$K_{bi}(A) \otimes_A M \cong A \otimes R_\bullet \otimes M$$

y $gldimA \leq$ el máximo grado $n/\ A^!_n \neq 0$.

Pero $\mathrm{Ext}^n_A(k,k) = A^!_n$, luego

Coro 2: dim $V < \infty$, A Koszul

$$\Rightarrow gldim(A) < \infty \iff \dim_k A^! < \infty$$

En ese caso, $gldim(A) =$ el máximo grado tal que $n\ /\ A^!_n \neq 0$.

Coro 3: A Koszul a izq $\iff$ A Koszul a derecha

Koszulidad de A vs de $A^!$

$A = TV/(R)$, $\dim V < \infty$. El complejo de Koszul de A a izquierda es

$$K_\ell(A) = (A \otimes A^{¡}_\bullet, d_A)$$

En grado homológico n tiene $A \otimes A^{¡}_n$
y en grado interno $n + m$: $A_m \otimes A^{¡}_n$

El complejo de $A^!$ a derecha es

$$K_r(A^!) = (A^*_\bullet \otimes A^!, d_{A^!})$$

en grado homológico m es $A^*_m \otimes A^!$
y en grado interno $m + n$ tiene $A^*_m \otimes A^!_n$

Observamos $A^*_m \otimes A^! = (A_m \otimes A^{¡}_n)^*$ y $d_{A^!} = (d_A)^*$

Corolario: A es Koszul $\iff$ $A^!$ lo es.

Ejemplos: ΛV, $k_q[x,y]^! = k\langle x, y : x^2 = 0 = y^2, xy = -q^{-1}yx\rangle$, son Koszul.