Álgebras cuadráticas de Koszul

$$A = TV/(R), \qquad R \subseteq V^{\otimes 2}$$

diremos que A es un álgebra con relaciones cuadráticas.

Ejemplos:

$k[x,y] = T(k \oplus ky)/(x \otimes y - y \otimes x)$

$\Lambda(x,y) = T(kx \oplus ky)/(x \otimes x, x \otimes y + y \otimes x, y \otimes y)$

$A = TV \ (R = 0)$; $\qquad A = k \oplus V$ con $V \cdot V = 0 \ (R = V^{\otimes 2})$

$q \in k^{\times}$, $k_q[x,y] = k\langle x, y | xy = qyx \rangle$

Si $A = TV/(R)$ con $R \subseteq V^{\otimes 2}$ es un álgebra cuadrática, entonces es graduada y conexa,

$$A = k \oplus V \oplus \frac{V^{\otimes 2}}{R} \oplus \frac{V^{\otimes 3}}{V \otimes R + R \otimes V} \oplus \cdots$$

Se tiene la aumentación

$$\epsilon : A \to k$$

inducida por

$$TV \to k$$

$$v \mapsto 0$$

k es A-módulo, queremos encontrar una resolución lo más pequeña posible de k como A-módulo.

Empezamos por $\epsilon : A \to k \to 0$,
como $\mathrm{Ker}\epsilon = \langle V \rangle$, podemos continuar con

$$A \otimes V \to A \to k \to 0$$

$$a \otimes v \mapsto av$$

cómo continuamos? $R \subseteq V^{\otimes 2}$, consideramos el mapa

$$A \otimes V^{\otimes 2} \to A \otimes V$$

$$a \otimes v \otimes w \mapsto av \otimes w$$

Si hacemos la composición

$$A \otimes V^{\otimes 2} \to A \otimes V \to A$$

$$a \otimes v \otimes w \mapsto av \otimes w \mapsto avw$$

no necesariamente da cero, pero si lo restringimos a $A \otimes R$ sí:

$$A \otimes R \longrightarrow A \otimes V \longrightarrow A$$

$$a \otimes (\sum_i v_i \otimes w_i) \mapsto \sum_i av_i \otimes w_i \mapsto a(\sum_i v_i w_i) = 0$$

pues $\sum_i v_i \otimes w_i \in R$ y por lo tanto

$$0 = \sum_i v_i w_i \in TV/(R)$$

Por ahora tenemos un complejo

$$A \otimes R \to A \otimes V \to A \to k \to 0$$

Tomamos $A = TV$, $R = 0$, el complejo construido da simplemente

$$0 \to TV \otimes V \to TV \to k \to 0$$

es una resolución!

Si $A = k[x,y] = T(kx \oplus ky)/(x \otimes y - y \otimes x)$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes R \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \otimes V \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
A \otimes (x \otimes y - y \otimes x) \arrow[r] & A \otimes x \oplus A \otimes y \arrow[r] & A \arrow[r] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$$a \otimes (x \otimes y - y \otimes x) \longmapsto ax \otimes y - ay \otimes x \qquad a \longmapsto \epsilon(a)$$

$$a \otimes x + b \otimes y \longmapsto ax + by$$

Si $A = k \oplus V$ con $V \cdot V = 0$, o sea $R = V^{\otimes 2}$,

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes R \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \otimes V \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
(k \oplus V) \otimes V^{\otimes 2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (k \oplus V) \otimes V \arrow[r] \arrow[d, equal] & (k \oplus V) \arrow[r] \arrow[d, equal] & k \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
k \otimes V^{\otimes 2} \arrow[ddr] & k \otimes V \arrow[ddr] & k \arrow[ddr] & & \\
\oplus & \oplus & \oplus & & \\
V \otimes V^{\otimes 2} & V \otimes V & V & k &
\end{tikzcd}
$$

es exacto!

¿cómo continuar?

$$? \to A \otimes R \to A \otimes V \to A \to k \to 0$$

Podemos definir

$$R_3 := (R \otimes V) \cap (V \otimes R) \subseteq V^{\otimes 3}$$

y entonces la restricción a $A \otimes R_3$ nos da un morfismo en el objeto deseado:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes R_3 \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook] & A \otimes R \arrow[d, hook] \\
A \otimes V^{\otimes 3} \arrow[r] & A \otimes V^{\otimes 2}
\end{tikzcd}$$

$$a \otimes u \otimes v \otimes w \longmapsto au \otimes v \otimes w$$

En el ejemplo $k[x, y] = TV/(x \otimes y - y \otimes x)$, $R_3 = 0$, así que tenemos el candidato a resolución

$$0 \to A \otimes R \to A \otimes V \to A \to 0$$

En

$$k[x,y,z] = T(kx \oplus ky \oplus kz)/(x \otimes y - y \otimes x, x \otimes z - z \otimes x, y \otimes z - z \otimes y),$$

$$R_3 = kVol_3, \qquad Vol_3 = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\sigma} x_{\sigma 1} \otimes x_{\sigma 2} \otimes x_{\sigma 3}$$

y tenemos la resolución de Koszul de $k[x,y,z]$, llamando $x \wedge y = x \otimes y - y \otimes x$, etc

$$A \otimes Vol_3 \to A \otimes (kx \wedge y \oplus k \otimes y \wedge z \oplus k \otimes z \wedge x) \to A \otimes V \to A \to k \to 0$$

Motivados por esta construcción, definimos:

$$R_0 = k, \quad R_1 = V, \quad R_2 = R \subseteq V^{\otimes 2}$$

y para $n \geq 2$:

$$\boxed{R_n := \bigcap_{i+j+2=n} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}} \subseteq V^{\otimes n}$$

y $d : A \otimes R_n \to A \otimes R_{n-1}$ definido restricción de $A \otimes V^{\otimes n} \to A \otimes V^{\otimes n-1}$:

$$\begin{tikzcd} A \otimes R_n \arrow[r, dashed, "d"] \arrow[d, hook] & A \otimes R_{n-1} \arrow[d, hook] \\ A \otimes V^{\otimes n} \arrow[r] & A \otimes V^{\otimes n-1} \end{tikzcd}$$

$$a \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto a v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$$

Definición: $A = TV/(R)$ con $R \subseteq V^{\otimes 2}$, el complejo

$$\cdots \to A \otimes R_n \to \cdots \to A \otimes R_3 \to A \otimes R \to A \otimes V \to A \to k \to 0$$

se denomina el **complejo de Koszul** de A.
Diremos que A es (cuadrática) Koszul si su complejo de Koszul es exacto.

Observación: Cada proyectivo de la resolución en el lugar n (es libre) es *graduado y generado en grado n*, pues es $A \otimes R_n$. Estas condicion es otra posible definición (que resulta equivalente) de Koszulidad.

Ejemplos:

1) $k[x_1, \ldots, x_n]$, $k \oplus V$ y TV.

2) El plano cuántico: si $q \in k^\times$,
$A = k_q[x, y] = k\{x, y\}/(xy - qyx)$ es Koszul, la resolución tiene largo 2:

$$0 \to A \otimes (x \otimes y - qy \otimes x) \longrightarrow A \otimes x \oplus A \otimes y \longrightarrow A \to k \to 0$$

$$a \otimes (x \otimes y - qy \otimes x) \mapsto ax \otimes y - qay \otimes x$$

3) Uno menos trivial es $A = k\langle a, b, c, d\rangle$ con relaciones

$$ab = qba,\ ac = qca,\ ad - da = (q - q^{-1})bc,$$

$$bc = cb,\ bd = qdb,\ cd = qdc$$

4) $A = k\{x, y\}/(x^2, yx)$ NO es Koszul.
(Es Noetheriana de un lado pero no del otro!)

Obs: A Koszul $\Rightarrow \mathrm{Tor}_n^A(k,k) = R_n$, $\mathrm{Ext}_A^n(k,k) = (R_n)^*$ (en particular tienen la misma dimensión).

Sabemos que $\mathrm{Ext}_A^{\bullet}(k,k)$ es un álgebra, es $k \oplus V \oplus R \oplus R_3 \oplus \cdots$ una coálgebra?,

Se puede comprobar que efectivamente

$$\bigoplus_{n \geq 0} R_n \subseteq T^c V$$

es sub-coálgebra con la deconcatenación.

más fácil, veremos el álgebra dual-Koszul $A^!$ asociada a A

El dual de Koszul

$A = TV/R$ con $R \subseteq V^{\otimes 2}$ es graduada

$$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n = k \oplus V \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus \cdots$$

donde $A_2 = V^{\otimes 2}/R$ y para $n > 2$,

$$A_n = \frac{V^{\otimes n}}{\sum_{i+j=n-2} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}}$$

El morfismo natural

$$V^* \otimes V^* \to (V \otimes V)^*$$

$$\phi \otimes \psi \mapsto \Big(v \otimes v' \mapsto \phi(v)\psi(v') \Big)$$

siempre inyectivo, es iso si $\dim_k V < \infty$.

Asumimos $\dim_k V < \infty$ e identificamos $V^* \otimes V^* \cong (V \otimes V)^*$. De la s.e.c.

$$0 \to R \to V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}/R \to 0$$

tenemos

$$0 \to \left(V^{\otimes 2}/R\right)^* \to (V^*)^{\otimes 2} \to R^* \to 0$$

Identificamos $(V^{\otimes 2}/R)^* \cong R^0 \subset (V^*)^{\otimes 2}$.

Definición: Si $A = TV/(R)$

$$\boxed{A^! := T(V^*)/(R^0)}$$

$A^!$ es cuadrática

Obs: $\dim V < \infty \Rightarrow (A^!)^! \cong A$ (via $V^{**} \cong V$)

Ejemplos:

A	$A^!$
$S(V)$	$\Lambda(V^*)$
TV	$k \oplus V^*$
$k\langle x, y \mid xy = qyx\rangle$	$k\langle X, Y \mid X^2 = 0 = Y^2, XY = -q^{-1}YX\rangle$

Obs: justo en estos ejemplos $\dim A^! < \infty$,
eso significará $gldim A < \infty$

Prop: $\dim_k V < \infty \Rightarrow A^!$ es el dual graduado de $R_\bullet$ y viceversa:

$$A^! = \bigoplus_{n\geq 0} R_n^*, \qquad \bigoplus_{n\geq 0} R_n \cong \bigoplus_{n\geq 0} (A_n^!)^* =: A^{¡}$$

Demostración: Primero observamos

$$A^! = k \oplus V^* \oplus A^!_2 \oplus \cdots \oplus A^!_n \oplus \cdots$$

donde

$$A^!_2 = (V^*)^{\otimes 2}/R^0 \cong R^* \boxed{\Rightarrow A^{!\,*}_2 \cong R^{**} \cong R}$$

$$\text{y para } n > 2: \qquad A^!_n = \frac{(V^*)^{\otimes n}}{\sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}}$$

$$A^! = k \oplus V^* \oplus R^* \oplus \cdots \oplus \frac{(V^*)^{\otimes n}}{\sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}} \oplus \cdots$$

Veamos unas fórmulas de álgebra lineal para mostrar

$$\left(\frac{(V^*)^{\otimes n}}{\sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}} \right)^* \cong \bigcap_{i+j=n-2} V^{**\otimes i} \otimes R^{**} \otimes V^{**\otimes j}$$

Supondremos ahora todos los espacios vect de dim finita

$$S, T \subseteq V \Rightarrow 0 \to (S+T) \xrightarrow{i} V \to \frac{V}{S+T} \to 0$$

$$\Rightarrow 0 \to \left(\frac{V}{S+T}\right)^* \to V^* \xrightarrow{i^*} (S+T)^* \to 0$$

Pero $i^* = |_{S+T} \Rightarrow \mathrm{Ker}(i^*) = (S+T)^0 = S^0 \cap T^0$ y tenemos

$$0 \to S^0 \cap T^0 \to V^* \xrightarrow{i^*} (S+T)^* \to 0$$

Ahora veamos formulas similares pero junto con $\otimes$

$S \subset V$, W y W' dos espacios vectoriales,

$$0 \to S \to V \to V/S \to 0$$

$$0 \to S^0 \to V^* \to S^* \to 0$$

$+$ exactitud $\otimes$

$$0 \longrightarrow W \otimes S \otimes W' \longrightarrow W \otimes V \otimes W' \longrightarrow W \otimes V/S \otimes W' \longrightarrow 0$$

luego

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (W \otimes V/S \otimes W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & (W \otimes V \otimes W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & (W \otimes S \otimes W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & W^* \otimes (V/S)^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & W^* \otimes V^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \otimes S^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & W^* \otimes S^0 \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & W^* \otimes V^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \otimes S^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & W^* \otimes S^0 \otimes (W')^* \arrow[r] & W^* \otimes V^* \otimes (W')^* \arrow[r] & \dfrac{W^* \otimes V^* \otimes (W')^*}{W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y si volvemos a dualizar

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \left(\dfrac{W^*\otimes V^*\otimes (W')^*}{W^*\otimes S^0\otimes (W')^*}\right)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & (W^*\otimes V^*\otimes (W')^*)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & \left(W^*\otimes S^0\otimes (W')^*\right)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(W^*\otimes S^0\otimes (W')^*\right)^0 \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & W^{**}\otimes V^{**}\otimes (W')^{**} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & \left(W^*\otimes S^0\otimes (W')^*\right)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(W^*\otimes S^0\otimes (W')^*\right)^0 \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & W^{**}\otimes V^{**}\otimes (W')^{**} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & W^{**}\otimes (S^0)^*\otimes (W')^{**} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(W^*\otimes S^0\otimes (W')^*\right)^0 \arrow[r] & W\otimes V\otimes W' \arrow[r] & W\otimes (V/S)\otimes W' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Concluimos

$$\boxed{\left(W^*\otimes S^0\otimes (W')^*\right)^0 \cong W\otimes S\otimes W'}$$

Aplicación a $A^!$

$$A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n,$$

$$0 \to \sum_{i+j=n-2} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j} \to V^{\otimes n} \to A_n \to 0$$

$$A^! = \bigoplus_{n\geq 0} A^!_n,$$

$$0 \to \sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j} \to (V^*)^{\otimes n} \to A^!_n \to 0$$

Dualizando,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (A^!_n)^* & \longrightarrow & \left((V^*)^{\otimes n}\right)^* & \to & \left(\sum\limits_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}\right)^* & \to & 0 \\
 & & \cong \| & & \cong \| & & \| & & \\
0 & \to & \bigcap\limits_{i+j=n-2} \left((V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}\right)^0 & \longrightarrow & V^{\otimes n} & \longrightarrow & \left(\sum\limits_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}\right)^* & \to & 0 \\
 & & \cong \| & & \cong \| & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \bigcap\limits_{i+j=n-2} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j} & \longrightarrow & V^{\otimes n} & \longrightarrow & \left(\sum\limits_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}\right)^* & \to & 0
\end{array}$$

Reencontramos entonces

$$A^{!\,*}_n \cong R_n = \bigcap_{i+j+2=n} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j} \subseteq V^{\otimes n}$$

Coro: $A^! = \bigoplus_n A^!_n$ es cociente de $TV \Rightarrow$ su dual graduado

$$\Rightarrow A^{¡} := \bigoplus_n (A^!_n)^* = \bigoplus_n R_n \subseteq T^c V$$

es sub co-álgebra de $T^c V$ con la deconcatenación.