Ext^1 y bimódulos

Teo: A conmutativo $\Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, A) \cong \mathrm{Der}_k(A)$.

Coro: $k \subseteq K$ extensión de cuerpo,
$\mathrm{Der}_k(K) \neq 0 \Rightarrow pdim_{K^e}(K) \geq 1$.

Notar $gldim(K) = 0 < 1 = pdim_{K^e}(K)$.

Ejemplo 1: k cuerpo, $K = k(x) = frac(k[x]), \Rightarrow$

$$D(p/q) = \frac{p'q - pq'}{q^2}$$

es una derivación no nula.

Ejemplo 2: k cuerpo $ch(k) = p > 0$, $a \in \overline{k} \setminus k$ tal que $a^p = \lambda \in k$. Entonces $K = k(a)$ es una extensión finita (no separable) con $\mathrm{Der}_k(K) \neq 0$.

Demostración de Ext^1_{bimod} vs Der

Consideremos A arbitrario (i.e. no nec. conmutativo)

$$0 \to A \to E \to A \to 0$$

s.e.c. de A-bimod k-sim $\Rightarrow$ s.e.c. de A-mod $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\cong"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_1"] & A \oplus A \arrow[r, "p_2"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

como A-mod a izquierda.
Si $e = (x, y) \in A \oplus A \cong E \Rightarrow a(x, y) = (ax, ay)$
porque el iso es de A-mod a izq. También $(x, 0)a = (xa, 0)$
porque $i : A \to E$ es morfismo de bimódulos, pero

$$(0, y)a = (??, ya)$$

pues $p : E \to A$ que es de bimódulos y el splitting es A-lineal
sólo a izq. O sea, $0 \oplus A$ no sabemos si es sub-bimod.

Denotemos

$$(0,1)a = (D(a), a)$$

donde $D(a) := p_1((0,1)a)$. Esta D determina la estructura pues

$$\begin{aligned}(x,y)a = (x,0)a + (0,y)a &= (xa,0) + y(0,1)a \\ &= (xa,0) + y(D(a),a) \\ &= (xa + yD(a), a)\end{aligned}$$

Aff: $D \in \mathrm{Der}_k(A)$: $(0,1)ab = (D(ab), ab)$ y también

$$((0,1)a)b = (D(a),a)b = (D(a)b + aD(b), ab)$$

$(0,1)(a+a') = (0,1)a + (0,1)a' \Rightarrow D(a+a') = D(a) + D(a')$

E es k-simétrico $\Rightarrow$ (si $\lambda \in k$) $(0,1)\lambda = \lambda(0,1) \Rightarrow$

$$(D(\lambda), \lambda) = (0, \lambda) \Rightarrow D(\lambda) = 0$$

Sea $A \oplus_D A = A \oplus A$ como A-mod a izq y

$$(x,y)a = (xa + yD(a), ya)$$

y supongamos ϕ un iso de A-bimódulos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & A \oplus_D A \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_1"] & A \oplus_{\widetilde{D}} A \arrow[r, "p_2"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces $\phi(x,0) = (x,0)$, $\phi(0,y) = (??,y)$. Sea $u \in A$ tal que $\phi(0,1) = (u,1)$. Luego

$$\phi(x,y) = (x,0) + \phi(0,y) = (x,0) + y\phi(0,1) = (x + yu, y)$$

$$\boxed{\phi(x,y) = (x + yu, y)}$$

$$\phi((0,1)a) = \phi(D(a), a) = (D(a) + au, a)$$

$$\phi((0,1))a = (u,1)a = (ua + \widetilde{D}(a), a)$$

$$\Rightarrow D(a) = \widetilde{D}(a) + ua - au$$

$$\boxed{\therefore \operatorname{Ext}^1_{A^e}(A,A) \cong \operatorname{Der}_k(A)/Innder(A)}$$

En particular si A es conmutativo, $\operatorname{Ext}^1_{A^e}(A,A) \cong \operatorname{Der}_k(A)$.

Resolucion standard

$$\cdots \to A^{\otimes n+1} \to \cdots \to A^{\otimes 3} \to A^{\otimes 2} \to A \to 0$$

Sea A una k-álgebra. Definimos

$$B_n(A) := A^{\otimes n+1}$$

con diferencial

$$b'(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n$$

En grados bajos:

$$b'(a \otimes b \otimes c \otimes d) = ab \otimes c \otimes d - a \otimes bc \otimes d + a \otimes b \otimes cd$$

$$b'(a \otimes b \otimes c) = ab \otimes c - a \otimes bc$$

$$b'(a \otimes b) = ab = m(a \otimes b)$$

Hecho: $d_i^n : C_n \to C_{n-1}$, $i = 0, \ldots, n-1$ verificando

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \ \forall i < j$$

o mejor dicho

$$d_i^{n-1} d_j^n = d_{j-1}^{n-1} d_i^n \ \forall i < j$$

$\Rightarrow \partial_n := \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i d_i^n$ es un diferencial: $\partial^2 = 0$.

En nuestro caso

$$B_n(A) := A^{\otimes n+1}$$

$$d_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n$$

Además, $s(a_0 \otimes \cdots n_n) = 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n$ verifica

$$d_0 s = \mathrm{Id}$$

$$s d_i^n = d_{i+1}^{n+1} s$$

luego (ejercicio!) $sb' + b's = \mathrm{Id}$.

Obs: la resolucion standard

$$\cdots \to A^{\otimes n+1} \to \cdots \to A^{\otimes 3} \to A^{\otimes 2} \to A \to 0$$

permite tanto contar con resoluciones para $M \in {}_A\mathrm{Mod}$:

$$\cdots \to A^{\otimes n} \otimes M \to \cdots \to A^{\otimes 2} \otimes M \to A \otimes M \to M \to 0$$

con diferencial

$$b'(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m$$

como para calcular $\mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A, M)$ y $\mathrm{Ext}_{A^e}^\bullet(A, M)$, para M un A-bimódulo k-simétrico, **porque hemos resuelto a A.** Haremos esto último.

recordamos $\mathrm{Hom}_{A-bimod}(A\otimes V\otimes A, M)\cong \mathrm{Hom}_{k-bim}(V, M)$.

$$\Rightarrow \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{n+1}, M) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A\otimes A^{\otimes n-1}\otimes A, M)$$

$$\cong \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n-1}, M) =: C^n(A, M) \rightsquigarrow$$

$$0\to \mathrm{Hom}(k,M)\to \mathrm{Hom}(A,M)\to \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2},M)\to \mathrm{Hom}(A^{\otimes 3},M)\to\cdots$$

con diferencial (notar $M\cong \mathrm{Hom}_k(k, M)$, $m\mapsto \widehat{m}$ $(1\mapsto m)$)

$$\partial(\widehat{m})(a) = am - ma$$

$$partial(D)(a\otimes b) = aD(b) - D(ab) + D(a)b$$

$$\partial(f)(a\otimes b\otimes c) = af(b\otimes c) - f(ab\otimes c) + f(a\otimes bc) - f(a\otimes b)c$$

$\therefore$ $\boxed{H^0(A, M) = M^A}$ y re-encontramos

$$\boxed{H^1(A, M) = \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, M) = \frac{\mathrm{Der}_k(A,M)}{Innder(A,M)}}$$

$$H^2(A, M) = \mathrm{Ext}^2(A, M) = \cdots ??$$