Cohomología de grupo

$\mathbb{Z}[G]$-módulos $=$ grupos abelianos $+$ acción aditiva de G:

$$1 \cdot m = m,$$
$$(gh) \cdot m = g \cdot (h \cdot m),$$
$$g \cdot (m + m') = g \cdot m + g \cdot m'.$$

$k[G]$-módulos $=$ k-módulos con una acción k-lineal de G:

$$g \cdot (\lambda m) = \lambda (g \cdot m)$$

Resolución bar

Sea B_n=$k[G]$-módulo libre con base G^n, denotamos

$$[g_1|\cdots|g_n] = e_{(g_1,\ldots,g_n)}$$

$B_n \cong k[G]^{\otimes n+1} = k[G] \otimes k[G]^{\otimes n}$.

Para $n = 0$, B_n=$k[G]$-módulo libre de rango 1, con base $[\ ]$.
Se define $\partial : B_n \to B_{n-1}$ via

$$\partial[g_1|\cdots|g_n] = g_1[g_2|\cdots|g_n] - [g_1g_2|g_3|\cdots|g_n]$$

$$+[g_1|g_2g_3|\cdots]-\cdots+(-1)^{n-1}[g1|\cdots|g_{n-1}g_n]+(-1)^n[g1|\cdots|g_{n-1}]$$

$$= g_1[g_2|\cdots|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1\cdots|g_ig_{i+1}|\cdots|g_n]$$

$$+(-1)^{n+1}[g_1|\cdots|g_{n-1}]$$

Por ejemplo, en grados bajos, para $x, y, z \in G$

$$\partial[x|y|z] = x[y|z] - [xy|z] + [x|yz] - [x|y]$$

$$\partial[x|y] = x[y] - [xy] + [x]$$

$$\partial[x] = x[\,] - [\,] = (x-1)[\,]$$

Notar $B_0/\partial(B_1) = k[G]/\langle (g-1) : g \in G\rangle \cong k$ con acción trivial, pues

$$k[G] \xrightarrow{\epsilon} k$$

$$g \mapsto 1$$

$$\sum_{g\in G} \lambda_g g \mapsto \sum_{g \in G} \lambda_g$$

Si $\sum_{g\in G} \lambda g \in \mathrm{Ker}(\epsilon) \Rightarrow$

$$\sum_{g\in G} \lambda_g g = \sum_{g\in G} \lambda_g g - \sum_{g\in G} \lambda_g = \sum_{g\in G} \lambda_g (g-1)$$

Caso $k = \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(B_n, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G] \otimes \mathbb{Z}[G^{\times n}], \mathbb{Z})$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^{\times n}], \mathbb{Z}) \cong Func(G^{\times n}, \mathbb{Z})$$

y el diferencial es, si $f : G^{\times n} \to \mathbb{Z}$,

$$\partial(f)(g_1, \dots, g_{n+1}) = f(g_2, \dots, g_{n+1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_{n+1}) + (-1)^{(n+1)} f(g_1, \cdots, g_n)$$

Nota: este es el complejo que da el modelo simplicial para calcular $H^n(K_1(G))$ y $H_n(K_1(G))$.

Obs: B_n es $k[G]$-libre con base G^n y si $s : B_n \to B_{n+1}$

$$s(g[g_1|\cdots|g_n]) := [g|g_1|\cdots|g_n]$$

$\Rightarrow s\partial + \partial s = \mathrm{Id}$. Luego

$$H_\bullet(G) := H_\bullet(K_1(G)) = \mathrm{Tor}_\bullet^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$$

$$H^\bullet(G) := H^\bullet(K_1(G)) = \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$$

y se puede usar cualquier resolución!

Ejemplo: $G = C_n = \langle t : t^n \rangle = 1$. $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)$.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[G]/(t-1)$$

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde $N = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}$.

$$0 = (1-t)\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^{i+1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}_n} (a_i - a_{i-1}) t^i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_0 t^i = N a_0$$

$$Nt = N$$

$$\Rightarrow 0 = N\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i N \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i + \sum_{i=1}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t^i - 1) \in Im(1-t)$$

$$\therefore \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es una resolución, $H^0(G) = \mathbb{Z} = H_0(C_n)$, y después es 2-periódica.

$$\cdots \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0 \ \rightsquigarrow$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \arrow[r, "N"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \arrow[r, "1-t"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) \arrow[r, "1-t"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) \arrow[r, "N"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) \arrow[r, "1-t"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}} \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & {}
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ para grados positivos

$$H^{2k+1}(G) = 0 = H_{2k}(G)$$

$$H^{2k}(G) = \mathbb{Z}_n = H_{2k+1}(G)$$

Ejercicio: Si tensorizamos con $-\otimes_{k[G]} k$ el complejo

$$\cdots \to k[G]^{\otimes n+1} \to \cdots \to k[G]^{\otimes 3} \to k[G]^{\otimes 2} \to k[G] \to 0$$

con diferencial b', obtenemos el complejo bar.

Si M es un G-módulo, se define

$$H_\bullet(G,M) = \mathrm{Tor}_\bullet^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$$

$$H^\bullet(G,M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$$

Coro / Ejercicio: $M \in k[G]$-Mod $\Rightarrow \mathrm{Ext}^\bullet_{k[G]}(k,M)$ se calcula con

$$\mathrm{Hom}_{k[G]}(B_n,M) \cong \mathrm{Hom}_{Sets}(G^n,M)$$

y diferencial

$$(df)(x_1,\dots,x_n) = x_1 \cdot f(x_2,\dots,x_n) +$$

$$+\sum_{i=1}^{i+1} f(x_1,\cdots,x_ix_{i+1},\dots,x_n) + (-1)^{n+1} f(x_1,\dots,x_{n-1})$$

$$H^1(G,M) \cong \frac{\{f: G \to M : x \cdot f(y) - f(xy) + f(x) = 0\}}{Inn(D,M)}$$

$$= \frac{\{f: G \to M : f(xy) = x \cdot f(y) - f(x)\}}{Inn(D,M)}$$

$Inn(G,M) = \{D : G \to M : \exists m \in M / D(g) = g \cdot m - m\}$

2-cociclos: $f : G \times G \to M$ /

$$xf(y,x) - f(xy,z) + f(x,yz) - f(x,y) = 0$$

¿Interpretación de $H^2(G,M)$?

Consideremos

$$0 \to M \to E \to G \to 1$$

una extensión de grupos con M abeliano, G arbitrario, y E arbitrario.

Por ejemplo

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\} \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$$

$$b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (a, b)$$

Es decir, $M \triangleleft E$, $E/M \cong G$. Tanto G como M son abelianos, pero E no es abeliano! (savo $p = 2$).

M y G determinan E? qué datos lo determinan?

Tomamos $e : G \to E$ una seccion conjuntista, $g \mapsto e_g \in E$, luego, como conjuntos (Lagrange)

$$E \leftrightarrow M \times G$$

Todo elemento $w \in E$ admite una escritura única

$$w = me_g$$

$M \triangleleft E \Rightarrow eMe^{-1} \subseteq M \forall e \in E$
$\Rightarrow M$ tiene una acción de E. Pero M es abeliano, entonces M actúa trivialmente sobre sí mismo por conjugación.
$\therefore M$ tiene una acción de $G = E/M$.

$$\Rightarrow \; g \cdot m := e_g m e_g^{-1}$$

está bien definida. (por eso necesitamos M abeliano, si M no es abeliano, la teoría es mucho más dura)

Ejercicio: La acción de G en M es trivial si y sólo si M es central en E.

La multiplicación en E se describe como

$$ww' = me_g m' e_{g'} = me_g m' e_g^{-1} e_g e_{g'}$$

$$= mg(m') e_g e_{g'}$$

Notar que $\pi : E \to G$ es de grupos $\Rightarrow$

$$E \ni e_g e_{g'} \mapsto gg' \in G \ \Rightarrow e_g e_{g'} = f(g, g') e_{gg'}$$

para alguna $f : G \times G \to M$. Luego

$$(mg)(mg') = mg(m') e_g e_{g'}$$

$$= mg(m')(e_g e_{g'} e_{gg'}^{-1}) e_{gg'}$$

$$= mg(m') f(g, g') e_{gg'}$$

Cambio notacional: cambiamos el conjunto E por $M \times G$, en M usamos notación aditiva

$$me_g \leftrightarrow (m, g)$$

M es subgrupo:

$$(m, 1)(m', 1) = (m + m', 1)$$

La acción de G en M es por conjugación en E y está bien definida:

$$(1, g)(m, 1)(1, g)^{-1} = (g(m), 1)$$

En general, el producto está dado por

$$\boxed{(m, g)(n, h) = (m + g(n) + f(g, h), gh)}$$

Concluimos E esta determinado por

- la acción de G en M
- una cierta $f : G \times G \to M$

Lema / Ejercicio: 1 Dada $0 \to M \to E \to G \to 0$ y una sección conjuntista $G \to E$ que da la biyección $E \leftrightarrow M \times G$, por la asociatividad de f, tenemos que

$$xf(y,z) + f(x,yz) = f(xy,z) + f(x,y)$$

Lema / Ejercicio: 2 Dada M un $\mathbb{Z}[G]$-módulo y $f : G \times G \to M$ un 2-cociclo, la multiplicación en $E := M \times G$ dada por

$$(m,x)(n,y) = (m + x \cdot n + f(x,y), xy)$$

es una ley de grupo y se tiene una extensión

$$0 \to M \to E \to G \to 1$$

Lema / Ejercicio: 3 $0 \to M \to E \to G \to 1$ una extensión con M abeliano, s una sección $G \to E$, f el cociclo

$$(0,x)(0,y) = (f(x,y), xy)$$

o bien

$$f(x,y) = s(x)s(y)s((xy)^{-1})$$

Si $\widetilde{s}$ es otra sección $\Rightarrow$ el 2-cociclo $\widetilde{f}$ es cohomólogo a f.

Lema / Ejercicio: 4 si $0 \to M \to E \to G \to 1$ y $0 \to M \to E' \to G \to 1$ son dos extensiones de G por M, entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E' \arrow[r] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

si y sólo si los 2-cociclos respectivos f y f' son cohomólogos.

Concluimos:

Teorema: existe una biyección entre $H^2(G, M)$ y clases de equivalencia de extensiones de grupos de la forma

$$0 \to M \to E \to G \to 1$$

La correspondencia es:

- Si M es un G-módulo y $[f] \in H^2(G, M)$, la extensión es $E = M \times G,\ (m, g) * (m', g') = (m + g(m) + f(g, g'), gg')$
- Si $0 \to M \to E \to G \to 1$ es una extensión con M grupo abeliano, entonces la acción de G en M está dada por

$$g(m) = s(g)ms(g)^{-1}$$

  donde $s : G \to E$ es una sección conjuntista de $E \to G$. La acción no depende de la s elegida. El 2-cociclo f es

$$f(g, g') = s(g)s(g')s(gg')^{-1}$$

  Su clase $[f]$ en H^2 no depende de s.

Ejercicio: E un grupo con $|E| = p^n$ y n primo, muestre que E sucede en una extensión de la forma

Aplicación: cálculo iterativo de grupos de orden p^n

Atención: Hay más de 10 millones de (clases de isomorfismo de) grupos de orden 512. (hay 10.494.213 (GAP)).

Si $|E| = p^3$ y $M \cong \mathbb{Z}_p$, $|G| = |E/M| = p^2$.

- Si $G = C_{p^2}$ es cíclico, tenemos una resolución pequeña, el cálculo de $H^2(C_n, \mathbb{Z}_p)$ es fácil!
- si $G = C_p \times C_p \Rightarrow$ podemos usar Künneth para calcular

$$H^2(C_p \times C_p, \mathbb{Z}_p) = \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[C_p \times C_p]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) = \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[C_p] \otimes \mathbb{Z}[C_p]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$$