Álgebras de Lie, complejo de Chevalley-Eilenberg

1 El Casimir y álgebras semisimples

En esta sección y la siguiente supondremos k un cuerpo de característica cero, y $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie de dimensión finita.

Definición: un ideal de un álgebra $\mathfrak{g}$ es un subespacio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Definición: Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *simple* si no tiene ideales salvo 0 y $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}$ no es abeliana (excluyendo de esta manera el caso trivial cuando $\dim_k \mathfrak{g} = 1$)

Definición: Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *semisimple* si es isomorfa a un producto directo (con corchete coordenada a coordenada) de álgebars de Lie simples.

1. Sea V un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita. Llamamos

$$x|_V := x \cdot - : V \to V$$

a la acción de un elemento x de $\mathfrak{g}$ en V. Se define la forma bilineal asociada b_V por

$$b_V(x, y) = tr_V(x|_V \circ y|_V)$$

donde tr_V es la traza en $\mathrm{End}_k(V)$. Muestre que b_V es simétrica y $\mathfrak{g}$-invariante en el siguiente sentido:

$$b_V(x, y) = b_V(y, x)$$

$$b_V([x, y], z) = b_V(x, [y, z])$$

Si $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita y $V = \mathfrak{g}^{ad}$, la forma bilineal se llama *forma de Killing* y se denota $(-, -)$, o $\kappa(-, -)$.

2. Calcule la matriz de la forma bilineal de κ para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, muestre que la forma bilineal es no degenerada.

Criterio de Cartan: ($\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero)

i) $\mathfrak{g}$ es semi-simple si y sólo si su forma de Killing es no-degenerada.

ii) Si $\mathfrak{g}$ en una subálgebra de Lie $M_n(k)$, entonces $\beta(x, y) := tr(xy)$ (la traza usual de matrices) también es no degenerada.

Utilizaremos este criterio sin demostración. (Ver por ejemplo las referencias en la Wikipedia, o [Humphreys, J., Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.] o bien [Knapp, A., Lie Groups Beyond an Introduction. Progress in Mathematics, 140. Birkhuser, Boston, MA, 1996.])

De aquí en adelante $\mathfrak{g}$ *es semisimple, o equivaletemente es tal que su forma de Killing es no degenerada.*

3. Sea $x_1, \ldots, x_n$ una base, y sean $x^1, \ldots, x^n$ en $\mathfrak{g}$ tales que

$$\kappa(x_i, x^j) = \delta_i^j$$

Muestre que el elemento, llamado **Casimir**, definido por

$$\Omega := \sum_{i=1}^{n} x_i x^i \in U(\mathfrak{g})$$

es independiente de la base elegida. En particular, $\Omega := \sum_{i=1}^n x_i x^i = \sum_{i=1}^n x^i x_i$.

4. Si $x \in \mathfrak{g}$ y $[x_i, x] = \sum_j c_{ij} x_j$ entonces $[x, x^j] = \sum_i c_{ij} e^j$ (sugerencia: use que la forma de Killing es invariante)

5. Muestre que Ω está en en centro de $U(\mathfrak{g})$, y por lo tanto para cualquier $\mathfrak{g}$-módulo M, la multiplicación por Ω es $U(\mathfrak{g})$-lineal.

6. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_k$ es un producto de simples, entonces su casimir $\Omega = \sum_{i=1}^k \Omega_i$ es a suma de los casimires de cada $\mathfrak{g}_i$.

7. (Lema de Schur) Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita y simple (i.e. los únicos $\mathfrak{g}$-submódulos son 0 y M). Si k es algebraicamente cerrado, muestre que la acción de Ω en M es un múltplo de la identidad, es decir, $\exists c_M \in k$ tal que

$$\Omega|_M = c_M \mathrm{Id}_M$$

Notar que esto implica que $c_M \dim_k(M) = tr(\Omega|_M)$. *Sugerencia: muestre que* $\Omega|_M$ *tiene algun autovalor, y que el subespacio de autovectores correspondiente es un* $\mathfrak{g}$*-submódulo no nulo.*

2 Generalidades de representaciones y el Casimir

1. Sean M y N dos $\mathfrak{g}$-módulos, muestre que

   (a) $M \otimes N$ es naturalmente un $\mathfrak{g}$-módulo con la acción

   $$x \cdot (m \otimes n) = xm \otimes n + m \otimes xn$$

   y el isomorfismo de trasposición $M \otimes N \cong N \otimes M$ es de $\mathfrak{g}$-módulos.

   (b) $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ es un $\mathfrak{g}$-módulo via

   $$(x \cdot f)(m) := xf(m) - f(xm)$$

   En particular, viendo k como $\mathfrak{g}$-módulo trivial, M^* es $\mathfrak{g}$-módulo con $(x \cdot \phi)(m) = -\phi(xm)$.

(c) Muestre que el morfismo natural

$$M^* \otimes N \to \mathrm{Hom}_k(M,N)$$

es de $\mathfrak{g}$-módulos.

(d) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N) = \mathrm{Hom}_k(M,N)^{\mathfrak{g}}$ donde, si V es una representación, $V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V : xv = 0 \forall x \in \mathfrak{g}\} \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(k,V)$.

(e) Si M y N son de dimensión finita, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N) \cong (M^* \otimes N)^{\mathfrak{g}}$

(f) La descomposición en tensores simétricos y antisimétricos $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} = S^2\mathfrak{g} \oplus \Lambda^2\mathfrak{g}$ es también como $\mathfrak{g}$-módulos. Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonce el "casimir"

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x^i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

donde $\{x_i\}_i$ es una base y $\kappa(x_i, x^j) = \delta_i^j$ es un elemento simétrico e invariante, es decir, un elemento de $S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

2. Sea $\mathfrak{g}$ simple, muestre

(a) $M = \mathfrak{g}^{ad}$ es una representación simple, luego $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ tiene dimensión 1.

(b) $\mathfrak{g}$ semisimple entonces $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ como representaciones, si además $\mathfrak{g}$ es simple, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^*,\mathfrak{g}) \cong (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ tiene dimensión 1. Concluimos que $(S^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ tiene dimensión 1 y está generado por el Casimir y que $(\Lambda^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = 0$. endenumerate

(c) Sea $\mathfrak{g}$ simple y Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo simple **no trivial** de dimensión m, llamemos

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(M) = M_m(k)$$

a la acción. Muestre que

i. (usando el criterio de Cartan parte ii) $\beta(x,y) = tr(\rho(x) \circ \rho(y))$ es un múltiplo no nulo de la forma de Killing. Por lo tanto, si $x_1, \ldots, x_n$ es una base de $\mathfrak{g}$ y $\{y^1, \ldots, y^n\}$ en $\mathfrak{g}$ satisfacen

$$\beta(x_i, y^j) = \delta_i^j$$

entonces $\widetilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} x_i y^i$ es un múltiplo escalar no nulo del Casimir de $\mathfrak{g}$.

ii. La multiplicación por $\widetilde{\Omega}$ en M es un múltiplo de la identidad, llamémoslo $\widetilde{c}_M$, que a su vez, es un múltiplo no nulo de la acción del Casimir Ω en M (que es el escalar c_M).

iii. Tomando traza al endomorfismo $\widetilde{\Omega}|_M$ muestre que (k de característica cero) $\widetilde{c}_M = 1$, y por lo tanto $c_M \neq 0$.

3. Sea $\mathfrak{g}$ semisimple y M de dimensión finita una representación simple no trivial. Muestre que el Casimir actúa por un escalar no nulo.

3 Lemas de Whitehead y Teorema de Weyl

En esta sección, k es cuerpo de característica cero, y $\mathfrak{g}$ es semisimple.

1. Sea M simple de dimensió finta que no es el módulo trivial. Muestre que
$$H^\bullet(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{U\mathfrak{g}}(k, M) = 0$$
Sugerencia: para cualquier anillo A, $\mathrm{Ext}^\bullet_A(M,N)$ es siempre un $Z(A)$-módulo y su acción de $Z(A)$ inducida por la acción en M coincide con la inducida por N. Luego, usando el Casimir, la multiplicación por un escalar no nulo (si lo vemos actuando en M) debe ser cero (si lo vemos actuando en k).

2. Sea $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (muestre que si $\mathfrak{g}$ es semimisple entonces $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$). Muestre que $H^1(\mathfrak{g}, k) = 0$.

3. **Primer Lema de Whitehead**. Usando que $H^1(\mathfrak{g}, k) = 0$ y que $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$ para todo M *simple* de dimensión finita que no sea el módulo trivial, muestre que (segundo Lema de Whitehead)
$$H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$$
para todo M de dimensión finita. (Sugerencia: use inducción en la dimensión y la sucesión exacta larga de cohomología).

4. **Teorema de Weyl.** Sea $\mathfrak{g}$ semisimple y k de característica cero. Entonces todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión de dimensión finita es completamente reducible, o equivalentemente, todo submódulo de un módulo de dimensión finita admite un complemento. O equivalentemente, la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos *de dimensión finita* es semisimple.

   Demostración: Sea M de dimensión finita que no sea simple y M_0 un submódulo propio, consideremos la s.e.c.
$$0 \to M_0 \to M \to M/M_0 \to 0$$
   Utilice el isomorfismo
$$\mathrm{Ext}^1_{U\mathfrak{g}}(M/M_0, M_0) \cong H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(M/M_0, M_0))$$
   mas el primer Lema de Whitehead y concluya que la sucesión se parte, y por lo tanto M_0 se complementa en M.

5. Sea $0 \to k \to \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$ una s.e.c con π morfismo de álgebras de Lie y k un ideal de dimensión 1. Si $e \in \mathfrak{e}$ y $x \in \mathfrak{g}$, sea $\widetilde{x} \in \mathfrak{e}$ tal que $\pi(\widetilde{x}) = x$. Definimos
$$x \cdot e := [\widetilde{x}, e]$$
   Muestre que está bien definido y que $\mathfrak{e}$ resulta un $\mathfrak{g}$-módulo con esta acción, y que π resulta $\mathfrak{g}$-lineal. Concluya del Teorema de Weyl que π admite una sección como $\mathfrak{g}$-módulo, y por lo tanto una sección de álgebras d eLie. Concluya que $H^2(\mathfrak{g}, k) = 0$ si $\mathfrak{g}$ es semisimple.

6. **Segundo Lema de Whithead.** Muestre que si M tiene dimensión finita y $\mathfrak{g}$ es semisimple entonce $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$.

7. Muestre que $H^3(\mathfrak{sl}(2,k), k) \cong k$, por lo tanto no hay tercer lema de Whitehead.

Dualidad

Aquí $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, no es necesario que sea semisimple.

1. Muestre que si M es una representación de dimensión 1, entonces $M \otimes M^* \cong k$ (la representación trivial).

2. Muestre que $\Lambda^i M \subset M^{\otimes i}$, donde $\Lambda^i M$= tensores completamente antisimétricos y $S^k(M)$=tensores simétricos son dos $\mathfrak{g}$-submódulos de $M^{\otimes i}$ para cualquier $i \geq 2$.

   En particular $\Lambda^k \mathfrak{g}$ es un $\mathfrak{g}$-módulo, y $\Lambda^{\dim M} M$ es un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión 1.

3. Muestre que si $\{v_1 \ldots, v_n\}$ es una base de M, $Vol_M = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ es un generador de $\Lambda^{\dim M} M$, y
$$x \cdot Vol = tr(x|_M) Vol_M$$
   Una $\mathfrak{g}$ donde $tr(ad_x) = tr(x|_{\mathfrak{g}^{ad}}) = 0$ para todo x se dice *unimodular*. Es decir, $\mathfrak{g}$ se dice unimodular $\iff$ $\Lambda^{\dim \mathfrak{g}} \mathfrak{g} = (\Lambda^{\dim \mathfrak{g}} \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

4. Muestre que si $\dim \mathfrak{g} = n$, entonces $H^n(\mathfrak{g}, \Lambda^n \mathfrak{g}) = k$

5. Muestre que $\mathrm{Ext}^{\bullet}_{U\mathfrak{g}}(M, N) = H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(M, N))$, luego
$$gldim(U\mathfrak{g}) = n, \qquad \text{donde } \dim_k \mathfrak{g} = n$$

6. Muestre que si $\mathfrak{g}$ es unimodular entonces $H^n(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g})) \cong U(\mathfrak{g})$ y cero en los demás grados. En general, $H^n(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g})) \cong U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g}^*$ y cero en los demás grados.

7. Muestre que $H^k(\mathfrak{g}, M) \cong H_{n-k}(\mathfrak{g}, \Lambda^n \mathfrak{g}^* \otimes M)$, donde $n = \dim_k(\mathfrak{g})$.