ÁLGEBRA HOMOLÓGICA

Álgebras de Koszul 3

Operaciones entre álgebras cuadráticas

En esta sección, k es un cuerpo, las álgebras serán finitamente generadas como álgebras.

1. Sean A y B dos álgebras cuadráticas. Si $A = TV/(R)$ y $B = TW/(S)$, escriba las relaciones que hay que poner en $T(V \oplus W)$ para obtener $A \otimes B$, en particular, $A \otimes B$ también resulta cuadrática.

2. Sean A y B dos álgebras cuadráticas, en particular son graduadas. Muestre que $A \widehat{\otimes} B$ también es cuadrática, donde $A \widehat{\otimes} B = A \otimes B$ como espacio vectorial, pero el producto está dado por

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|} aa' \otimes bb'$$

   (donde b y a' se suponen homogéneos). Más precisamente, exhiba el subespacio de relaciones en términos de las relaciones de A y de B.

3. Muestre que si $(A \otimes B)^! = A^! \widehat{\otimes} B^!$

4. Muestre que si A y B son de Koszul, entonces $A \otimes B$ y $A \widehat{\otimes} B$ también lo son.

Productos de Manin

Si V_1, V_2, V_3, V_4 son cuatro espacios vectoriales, denotaremos (23) la transformación lineal que permuta los factores 2,3:

$$(23) : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes V_4 \to V_1 \otimes V_3 \otimes V_2 \otimes V_4$$

$$x \otimes y \otimes z \otimes t \mapsto x \otimes z \otimes y \otimes t$$

Si $A = TV/R$, $B = TW/S$, $U := V \otimes W$, se definen

$$A \bullet B := T(V \otimes W)/((23)(R \otimes S))$$

$$A \circ B := T(V \otimes W)/((23)(R \otimes W^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 2} \otimes S))$$

5. $A \bullet B = \bigoplus_n (A_n \otimes B_n)$

6. Muestre que

$$(A \bullet B)^! = (A^! \circ B^!)$$
$$(A \circ B)^! = (A^! \bullet B^!)$$

7. Tanto $\bullet$ como $\circ$ son asociativos, el álgebra $k[x]$ es el neutro para $\bullet$ y $k[x]/(x^2)$ es el neutro para $\circ$, es decir,
$$A \bullet (B \bullet C) \cong (A \bullet B) \bullet C$$
$$k[x] \bullet A \cong A \cong A \bullet k[x]$$

$$A \circ (B \circ C) \cong (A \circ B) \circ C$$
$$k[x]/(x^2) \circ A \cong A \cong A \circ k[x]/(x^2)$$

8. Calcule los generadores y relaciones de $A^! \circ A$ para $A = k[x, y]$, $k_q[x, y]$ y TV

9. **Posible tema de final:** *si A y B son Koszul, $A \bullet B$ y $A \circ B$ también lo son.*

10. Llamemos c-alg la categoría de álgebras cuadráticas, es decir, lo objetos son álgebras presentadas de la forma $A = TV/(R)$ con $R \subseteq V^{\otimes 2}$, y los morfismos son morfismos de k-álgebras que respetan el grado.

    (a) Si $A = TV/R$, $B = TW/S$, entonces
    $$\mathrm{Hom}_{c-alg}(A, B) \cong \{f : V \to W : (f \otimes f)(R) \subseteq S\ (\subseteq W \otimes W)\}$$

    (b) Muestre que existe un isomorfismo canónico
    $$\mathrm{Hom}_{c-alg}(A \bullet B^!, C) = \mathrm{Hom}_{c-alg}(A, B \circ C)$$

11. (las biálgebras de Manin) Sea $A = TV/(R)$ un álgebra cuadrática $x_1, \ldots, x_n$ una base de V, $x^1, \ldots, x^n$ su base dual, llamamos $t^i_j = x^i \otimes x_j \in V^* \otimes V$, notar que $\{t^i_j : i, j = 1, \ldots n\}$ es una base de $V^* \otimes V$.

    (a) Muestre que el morfismo
    $$\Delta : V^* \otimes V \to (V^* \otimes V) \otimes (V^* \otimes V)$$
    $$t^i_j \mapsto \sum_{k=1}^{n} t^i_k \otimes t^k_j$$
    es independiente de la base $x_1, \ldots, x_n$ elegida.

    (b) Denotemos $end(A) := A^! \bullet A$, muestre que Δ determina un morfismo de álgebras que es coasociativo y counitario
    $$\Delta : end(A) \to end(A) \otimes end(A)$$