Álgebra Homológica

# Álgebras de Koszul 2

## La serie de Hilbert y la de Poincaré

En esta sección, $k$ es un cuerpo.

**Definición 1.** $A = \bigoplus\limits_{n\geq 0} A_n$ un $k$-esp vect graduado tal que $\dim_k(A_n) < \infty \forall n$, su **serie de Hilbert** se define como

$$Hilb(A)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k(A_n)t^n \qquad \in \mathbb{Z}[[t]]$$

Si $A$ es una $k$- álgebra aumentada se define su **serie de Poincaré** como

$$P(A)(t) = \sum_{n\geq 0} \dim_k(\mathrm{Ext}^n_A(k,k))t^n \qquad \in \mathbb{Z}[[t]]$$

*Observación* 2. Si $A$ es Koszul, entonces $P(A)(t) = Hilb(A^!)(t)$.

**Definición 3.** Si $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ es espacio vectorial graduado un complejo de espacios vectoriales con $\dim_k \left(\bigoplus_n M_n\right) < \infty$, se define su característica de Euler como

$$\chi(M) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \dim_k M_n \qquad \in \mathbb{Z}$$

1. Sea $(M, d)$ un complejo de $k$-esp. vect. con $\dim_k \left(\bigoplus_n M_n\right) < \infty$, muestre que

$$\chi(M) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \dim_k M_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \dim_k H_n(M_\bullet, d) = \chi(H_\bullet(M, d))$$

2. $\dim_k V < \infty$, $R \subseteq V^{\otimes 2}$ y $A = TV/(R)$ un álgebra de Koszul. Mostraremos que

$$Hilb(A)(t) \cdot P(A)(-t) = Hilb(A)(t) \cdot Hilb(A^!)(-t) = 1$$

   Para esto, chequeamos lo siguiente:

   (a) Si $A$ es cuadrática (no necesariamente Koszul) y en el complejo de Koszul

$$K(A) = (\cdots \to A \otimes A^{¡}_i \to A \otimes A^{¡}_{i-1} \to \cdots)$$

   consideramos la graduación

$$A \otimes A^{¡}_i = \left(\bigoplus_{p\geq 0} A_p\right) \otimes A^{¡}_i$$

$$a \in A_p, r \in A^{¡}_i = R_i \Rightarrow |a \otimes r| = p + i$$

   entonces el diferencial es homogéneo de grado cero.

(b) El complejo de Koszul es una suma directa de subcomplejos

$$(K(A),d)=\bigoplus_{m\geq 0}(K(A)_m,d_m)$$

donde $K(A)_m$ es el la parte homogénea de grado $m$:

$$K(A)_m=(\cdots\to A_{m-i}\otimes A^{\text{¡}}_i\to A_{m+1-i}\otimes A^{\text{¡}}_{i-1}\to\cdots)$$

(c) Si $A$ es Koszul, entonces

$$\forall m:\qquad \chi(K(A)_m)=\chi((A\otimes R_\bullet)_m)=\sum_n(-1)^n\dim_k\Big(A_{m-n}\otimes R_n\Big)$$

$$=\sum_n(-1)^n\dim_k(H_n(A\otimes R_\bullet,d)_m)=\begin{cases}1 & \text{si } m=0\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

Concluimos

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}t^m\left(\sum_n(-1)^n\dim_k(H_n(A\otimes R_\bullet,d)_m)\right)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}t^m\left(\sum_n(-1)^n\dim_k(A_{m-n}\otimes R_n)\right)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}t^m\left(\sum_n(-1)^n\dim_k(A_{m-n})\cdot\dim_k(A^!_n)\right)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}\sum_n\dim_k(A_{m-n})t^{m-n}\cdot\dim_k(A^!_n)(-t)^n\\
&= \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\dim_k(A_n)t^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\dim_k(A^!_n)(-t)^n\Big)\\
&= Hilb(A)(t)\cdot Hilb(A^!)(-t)=Hilb(A)(t)\cdot P(A)(-t)
\end{aligned}$$

Como corolario:

3. Si $A$ es cuadrática y $Hilb(A)(t)\cdot Hilb(A^!)(-t)\neq 1$ entonces $A$ no puede se Koszul.

4. Sea $V$ con $\dim V=n$, calcular la serie de Hilbert de $S(V)$, $\Lambda(V)$, $TV$, $k\oplus V$ y verificar la igualdad anterior. (Notar que la serie de Hillbert de $k_q[x,y]$ es la misma que la de $k[x,y]$.)

5. Calcule $Hilb(A)(t)$ y $Hilb(A^!)(-t)$ para $A=k\{x,y\}/(x^2)$.

6. Muestre que $A=k\{x,y\}/(x^2,xy)$ "pasa el test" de la serie de Hilbert, sin embargo no es Koszul, por lo tanto la propiedad es necesaria pero no suficiente en general.

7. **Posible tema de final:** ver la bibliografía sobre chequeo de Koszulidad en Sección 4.1 y 4.3 de [JL.L. Loday - B. Vallette, *Algebraic Operads*]

   `https://www.math.univ-paris13.fr/~vallette/Operads.pdf`

   Otra biobliografía relevante para bases:

   [G. M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Adv. inMath. 29 (1978), no. 2, 178218.